



高新科技译丛

Fundamentals of Object Tracking

目标跟踪基本原理

【澳】Subhash Challa

【澳】Mark R. Morelande

【韩】Darko Mušicki

【澳】Robin J. Evans

著

周共健

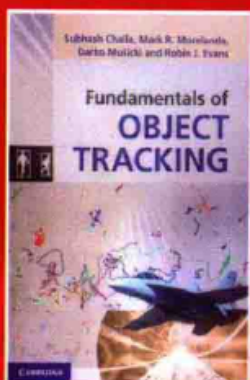
译

CAMBRIDGE



国防工业出版社
National Defense Industry Press

责任编辑：熊思华 shxiong@ndip.cn
责任校对：苏向颖
封面设计：蒋秀芹



*Fundamentals of
Object Tracking*

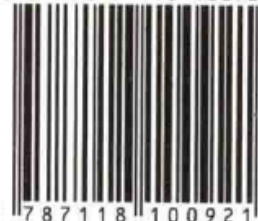
CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS
www.cambridge.org



► 上架建议：目标跟踪 ◀

<http://www.ndip.cn>

ISBN 978-7-118-10092-1



9 787118 100921 >

定价：86.00 元



装备科技译著出版基金

目标跟踪基本原理

Fundamentals of Object Tracking

【澳】Subhash Challa 【澳】Mark R. Morelande 著
【韩】Darko Mušicki 【澳】Robin J. Evans

周共健 译

国防工业出版社

· 北京 ·

著作权合同登记 图字:军-2015-022 号

图书在版编目(CIP)数据

目标跟踪基本原理 / (澳) 卡拉 (Challa, S.) 等著; 周共健译. —北京: 国防工业出版社, 2015. 9

(高新科技译丛)

书名原文: Fundamentals of Object Tracking

ISBN 978-7-118-10092-1

I. ①目... II. ①卡... ②周... III. ①目标跟踪 IV. ①TN953

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 069425 号

This is a translation of the first title published by Cambridge University Press:

Fundamentals of Object Tracking by Subhash Challa... [et al]

ISBN 978-0-521-87628-5

Cambridge University Press 2011

This translation for the People's Republic of China (excluding Hong Kong, Macau and Taiwan) is

Published by arrangement with the Press Syndicate of the University of Cambridge, Cambridge, United Kingdom.

© Cambridge University Press and National Defense Industry Press 2015.

This translation is authorized for sale in the People's Republic of China (excluding Hong Kong, Macau and Taiwan) only. Unauthorized export of this translation is a violation of the Copyright Act. No part of this publication may be reproduced or distributed by any means, or stored in a database or retrieval system, without the prior written permission of Cambridge University Press and National Defense Industry Press.

版权所有, 侵权必究。

※

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100048)

三河市众誉天成印务有限公司印刷

新华书店经售

*

开本 710 × 1000 1/16 印张 19 1/4 字数 378 千字

2015 年 9 月第 1 版第 1 次印刷 印数 1—2000 册 定价 86.00 元

(本书如有印装错误, 我社负责调换)

国防书店: (010) 88540777

发行邮购: (010) 88540776

发行传真: (010) 88540755

发行业务: (010) 88540717

译者序

目标跟踪在军事和民用领域都具有广泛的应用,如空中监视、卫星和飞船跟踪、潜艇和鲸鱼的跟踪以及智能视频监控等。过去 60 年来许多学者、科学家及工程技术人员提出了很多适用于不同应用背景的目标跟踪技术和方法,诸如卡尔曼滤波、粒子滤波、交互式多模型(IMM)、概率数据互联(PDA)、集成航迹分裂(ITS)算法,以及随机集方法等。本书不仅对这些经典和最新算法进行了收集和呈现,更是从目标跟踪的通用贝叶斯解出发,阐述了各类看似互不相关的算法之间的深刻联系,并分析它们在最优贝叶斯解近似方式和程度上的区别。将为从事目标跟踪实践及研究的工作人员快速理解和彻底掌握种类众多的复杂跟踪算法提供帮助,并给他们在各自特殊的应用背景下设计适应性的跟踪算法提供有力的理论支撑。

本书作者 Darko Mušicki、Mark R. Morelande 等人多年从事目标跟踪理论和方法的研究,是著名算法集成概率数据互联(IPDA)、集成航迹分裂(ITS)以及对应的多目标跟踪算法联合集成概率数据互联(JIPDA)、联合集成航迹分裂(JITS)等算法的主要创始人和实践者。这一系列算法不仅理论上自成体系,而且具有很强的工程实用价值,同时与联合概率数据互联(PDA)、多假设跟踪(MHT)以及随机有限集等算法又有着共同理论基础和直接对应关系。

翻译本书的目的是将原著作者提出的一系列跟踪算法,以及他们对现有目标跟踪理论和方法的深刻理解及系统性阐述介绍给国内从事该领域研究开发的科研技术人员。在翻译本书的过程中,哈尔滨工业大学学报编辑部徐诺女士,译者所在课题组的博士研究生赵孔瑞、郭正琨,硕士研究生马丁、程兴、刁亚娟、徐亮、谢青青做了大量的基础性工作,在此对他们的付出表示感谢。

由于时间仓促,译者水平有限,书中难免有疏漏和不妥之处,欢迎读者朋友批评指正。

译者

前 言

跟踪运动目标的轨迹是一项有着悠久历史的活动,在古代社会,人们在狩猎的过程中就要对猎物进行跟踪,人们还发明了利用对恒星的跟踪进行导航和预测季节变化的技术。可以说,目标跟踪已经成为人类生存的基本技能,并在人类进化中做出了极其重要的贡献。

近年来,目标跟踪在民用领域中的应用得到了飞速的发展,跟踪算法已经成为人们日常生活不可或缺的一部分。举例来说,GPS 导航定位已经成为人们日常生活的工具,在 GPS 导航系统中,一群人造卫星对人们驾驶的交通工具进行连续的搜索,并通过 GPS 系统内部的目标跟踪算法最终实现自我定位,基于此,人们才能享受到一系列便捷的服务,如寻找目的地、路径规划等。实际上,目标跟踪技术有着非常广泛的应用领域,如空中监视、卫星及飞船跟踪、潜艇和鲸鱼的跟踪以及智能视频监控等。在许多其他领域也需要用到目标跟踪算法,如利用激光、立体摄像机及其他传感器的机器人自动导航,天气预报中对携有无线电探空仪的气球的跟踪。最近,在细胞生物学领域,为了研究细胞的消亡受不同化学和环境因素的影响情况,需要对多种细胞进行自动跟踪,包括经过几代繁衍和死亡的淋巴细胞和干细胞。

本书对目标跟踪这一迷人的研究领域进行系统的介绍,并为过去 60 年来许多学者、科学家及工程技术人员提出的一系列不同算法给出一个坚实的统一的原理阐述。由于历史的原因,现代目标跟踪算法均是严格理想条件下的方法在实际应用环境下的系统性的扩展。这些算法通常要么是改进的目标动态模型,要么是改进的观测模型与相关的统计学方法或近似方法结合的创新产物。因此,出现了一大批适用于不同具体应用背景的看似互不相关的目标跟踪技术和方法。相应地,现有目标跟踪专著中,大多是对各种不同算法的简单收集和呈现。

然而,所有这些技术有着坚实的递推贝叶斯逻辑学基础,它们均可在贝叶斯概率框架下进行描述和推导。本书的目的即是在展示实时处理应用中最新的有效算法的同时,给出这种统一的理论阐述方法。本书将帮助越来越多的正在或即将从事目标跟踪实践的技术人员和科研人员,以及高校工程学或统计学的学生彻底地理解目标跟踪问题。

第 1 章,简述通用的目标跟踪问题,并给出该问题的通用贝叶斯解。对于各种目标跟踪问题,本章给出一种通用的解法,并在后半部分简要地回顾了目前工程人

员使用的主要跟踪算法。所有这些算法均将估计或者滤波作为核心算法部件。卡尔曼滤波(KF)、扩展卡尔曼滤波(EKF)、不敏卡尔曼滤波(UKF)、点群滤波(PMF)和粒子滤波(PF)是解决估计或滤波问题的几种典型算法。这些算法均可看作是对递推贝叶斯公式的近似。第2章从这一角度,对它们进行了推导,这些算法构成了做近似匀速运动的单目标跟踪的基础。关于机动目标跟踪的滤波问题,已有大量文献对其进行研究,包括广义的伪贝叶斯(GPB)滤波、交互式多模型(IMM)滤波及许多其他滤波方法。第3章介绍这些机动目标跟踪滤波方法及其贝叶斯原理。

用来估计航迹的传感器观测中可能包含虚假观测,这是目标跟踪必须面对的一个特殊问题。过去的文献对这一问题提出了大量甚至过剩的算法。本书第4章对解决这一问题的最近邻(NN)滤波、概率数据互联(PDA)滤波及其他类似算法进行了推导。所有这些算法均假设目标已经存在,然而,在实际系统中,一个目标是否存在是不确定的。一类算法引入目标存在性概念,用随机跳跃马尔可夫过程建立目标存在性模型,并用目标观测对其概率进行估计。这类算法中的集成航迹分裂(ITS)法及其衍生方法,如集成概率数据互联(IPDA)算法,将在第5章中进行介绍。这些算法既适用于单目标跟踪又可解决多目标跟踪问题。

多目标跟踪的任务不仅要估计每个目标的状态,还要提供目标个数的估计。第5章中介绍的基于ITS和IPDA的跟踪算法中虽可以获得目标个数的估计,然而目标个数的估计独立于跟踪算法之外。随机变化有限集提供了一个新的多目标跟踪模型,可以实现在估计各目标状态的同时给出目标个数的估计。第6章介绍基于随机集的建模方法,以及相应的基于随机集的贝叶斯跟踪器及其近似算法,如概率假设密度(PHD)和势化的概率假设密度(CPHD),还阐述了如何从随机集形式转化为基于目标存在性的滤波方法,如第5章介绍的IPDA和JIPDA算法。

大多数基于滤波或预测技术的目标跟踪系统均是利用当前传感器观测获得目标状态当前或未来时刻的最佳估计。然而,利用当前时刻的观测可以改善对目标过去状态的估计,这项技术通常称为平滑。第7章介绍了平滑的贝叶斯基本原理以及几种近似方法。第8章将平滑的贝叶斯框架扩展至非顺序观测(OOSM)跟踪问题。最后,第9章介绍目标跟踪算法实现中的一些重要技巧和方法,如航迹起始、航迹合并和终结等,并阐述了在实际应用中目标跟踪的实现问题,给出实际目标跟踪方法的一个系统的设计框架。

在实际系统中评价算法性能的一个有效途径就是将其性能与可能获得的最佳性能进行比较。最佳性能的指标有克拉美罗限(CRB)、Barankin限(BB)、Weiss-Weinstein限(WWB)以及其他性能限。我们在相应的章节中给出了所有实际应用场景的性能限。

由于目标跟踪算法解决的实际工程背景的特殊性,本书中介绍的一些算法可

能具有比较复杂的数学表达式,因此,为了帮助读者更好地理解这些算法,对于每章提出的算法,均给出实例演示如何在实际的跟踪问题中使用这些算法。

感谢在准备本书材料过程中帮助过我们的所有同事和学生,特别感谢 Khalid Aboura 博士和 Rajib Chakravorty 博士,他们在本书成形过程中给予了大力帮助。我们还要感谢 Nozer Singpurwalla 教授,是他将我们介绍给剑桥大学出版社并且一直鼓励我们承担起撰写此书的艰巨任务。我们要对所有好心人表示最深切的感谢,还有我们的家人,他们为此书从构想变为现实做出了巨大的牺牲。

目 录

第 1 章	目标跟踪简介	1
1.1	目标跟踪问题综述	1
1.1.1	空域监视	2
1.1.2	视频监控	3
1.1.3	气象监控	4
1.1.4	细胞生物学	5
1.2	贝叶斯推理及其在目标跟踪中的应用	6
1.2.1	贝叶斯定理	6
1.2.2	贝叶斯定理在目标跟踪中的应用	9
1.3	目标跟踪的递推贝叶斯解	12
1.3.1	广义的目标运动方程	12
1.3.2	广义的传感器观测方程	12
1.3.3	广义的目标状态预测及其条件密度	13
1.3.4	广义的目标状态预测与更新	13
1.3.5	广义的目标状态滤波	14
1.3.6	广义的目标状态估计	15
1.4	小结	16
第 2 章	滤波理论与非机动目标跟踪	17
2.1	最优贝叶斯滤波	17
2.1.1	目标动态方程与传感器观测方程	17
2.1.2	最优非机动目标跟踪滤波	18
2.2	卡尔曼滤波	19
2.2.1	卡尔曼滤波推导	19
2.2.2	卡尔曼滤波方程	23
2.3	扩展卡尔曼滤波	24
2.3.1	线性滤波近似	25
2.3.2	扩展卡尔曼滤波方程	27

2.4	不敏卡尔曼滤波	28
2.4.1	不敏变换	28
2.4.2	不敏卡尔曼滤波算法	30
2.5	点群滤波	33
2.5.1	转移和预测密度	33
2.5.2	似然函数和归一化因数	34
2.5.3	条件概率密度	34
2.5.4	点群滤波方程	35
2.6	粒子滤波	36
2.6.1	单目标粒子滤波跟踪	36
2.6.2	最优重要性密度粒子滤波(OID - PF)	37
2.6.3	单目标跟踪的辅助自举滤波	39
2.6.4	单目标跟踪的扩展卡尔曼辅助粒子滤波	40
2.7	性能界限	41
2.8	演示实例	44
2.9	本章小结	47
第3章	机动目标跟踪	48
3.1	机动目标跟踪模型	48
3.1.1	单模型状态增广	49
3.1.2	多模型算法	50
3.2	最优贝叶斯滤波	51
3.2.1	过程、观测和噪声模型	51
3.2.2	条件概率密度和模型概率	52
3.2.3	最优估计	52
3.3	广义伪贝叶斯滤波	55
3.3.1	一阶广义伪贝叶斯滤波	55
3.3.2	二阶广义伪贝叶斯滤波	60
3.4	交互作用多模型	65
3.4.1	IMM 滤波方程	65
3.5	基于粒子滤波的机动目标跟踪	71
3.5.1	基于自举滤波的机动目标跟踪	71
3.5.2	基于辅助自举滤波的机动目标跟踪	72
3.5.3	基于扩展卡尔曼辅助粒子滤波的机动目标跟踪	73
3.6	性能界限	75

3.7	演示实例	76
3.8	小结	78
第4章	杂波环境下的单目标跟踪	79
4.1	最优贝叶斯滤波	80
4.1.1	目标运动模型、传感器观测模型和噪声模型	80
4.1.2	条件概率密度	80
4.1.3	最优化估计	80
4.2	最近邻滤波法	82
4.2.1	最近邻滤波方程	84
4.3	概率数据关联滤波	85
4.3.1	概率数据关联方程	90
4.4	杂波环境下的机动目标跟踪	91
4.4.1	目标运动方程和传感器观测方程	91
4.4.2	杂波环境机动目标跟踪的贝叶斯最优解	91
4.4.3	杂波背景下机动目标跟踪的最优贝叶斯估计	93
4.5	杂波背景下目标跟踪的粒子滤波	93
4.5.1	杂波背景下目标跟踪的自举滤波	93
4.5.2	杂波背景下目标跟踪的扩展卡尔曼辅助粒子滤波	95
4.6	性能界限	97
4.7	演示实例	100
4.8	本章小结	101
第5章	杂波环境下的单/多目标跟踪:基于目标存在性的方法	102
5.1	引言	102
5.2	问题的描述	106
5.2.1	传感器	106
5.2.2	目标	106
5.2.3	目标观测	107
5.2.4	杂波观测	107
5.3	航迹状态	108
5.3.1	目标存在性	109
5.3.2	目标轨迹状态	110
5.4	最优贝叶斯递归	112
5.4.1	航迹预测	112

5.4.2	目标观测似然函数	113
5.4.3	最优航迹更新	115
5.4.4	单目标更新	116
5.4.5	多目标更新	120
5.4.6	航迹状态更新	128
5.5	最优航迹更新过程	131
5.5.1	航迹状态预测	133
5.5.2	观测选择(波门)技术	134
5.5.3	单目标跟踪数据关联	136
5.5.4	多目标跟踪数据关联	137
5.5.5	航迹的轨迹更新	139
5.5.6	跟踪输出	141
5.6	航迹分量控制	141
5.6.1	航迹分量合并	142
5.6.2	航迹分量树叶和子树的裁剪	144
5.7	基于目标存在性的单目标跟踪	147
5.7.1	概率数据互联	147
5.7.2	交互式多模型-概率数据关联(IMM-PDA)	149
5.7.3	集成概率数据关联(IPDA)	151
5.7.4	交互式多模型-集成概率数据关联(IMM-IPDA)	153
5.7.5	集成航迹分裂(ITS)	155
5.7.6	交互式多模型-集成航迹分裂(IMM-ITS)	157
5.8	基于目标存在性的多目标跟踪	159
5.8.1	联合概率数据关联(JPDA)	160
5.8.2	交互式多模型-联合概率数据关联(IMM-JPDA)	162
5.8.3	联合集成概率数据关联(JIPDA)	163
5.8.4	交互式多模型-联合集成概率数据关联(IMM-JIPDA)	165
5.8.5	联合集成航迹分裂(JITS)	167
5.8.6	交互式多模型-联合集成航迹分裂(IMM-JITS)	169
5.9	小结	171

第6章 基于随机集的杂波环境目标跟踪方法

6.1	最优贝叶斯多目标跟踪滤波	173
6.1.1	基于RFS的目标动态模型和传感器观测模型	173
6.1.2	基于RFS的马尔可夫转移概率密度和似然函数	174

6.1.3	RFS 最优估计	174
6.2	概率假设密度 (PHD) 滤波近似	175
6.2.1	RFS 的一阶矩: PHD	175
6.2.2	PHD 预测	175
6.2.3	PHD 更新	177
6.2.4	CPHD 近似	179
6.2.5	PHD 小结	180
6.2.6	CPHD 迭代小结	181
6.3	近似滤波	182
6.3.1	高斯混合 PHD 滤波	182
6.3.2	粒子 PHD 滤波	184
6.3.3	高斯混合 CPHD 滤波 (GMCPHD)	186
6.3.4	航迹标签法	187
6.3.5	状态估计	188
6.4	基于目标存在性的跟踪滤波	188
6.4.1	基于随机集的目标动态描述	189
6.4.2	传感器观测随机集模型	189
6.4.3	贝叶斯更新	192
6.4.4	集成概率数据关联滤波	193
6.4.5	从 GMPHD 滤波推导 JIPDA	196
6.5	性能界限	200
6.6	演示实例	201
6.7	小结	203
第 7 章	目标跟踪的贝叶斯平滑算法	204
7.1	平滑简介	204
7.2	最优贝叶斯平滑	205
7.2.1	平滑的增广模型	206
7.3	增广状态卡尔曼平滑	206
7.3.1	目标运动模型	206
7.3.2	传感器观测模型	207
7.3.3	状态估计	208
7.3.4	增广状态卡尔曼平滑方程	208
7.4	机动目标跟踪平滑	208
7.4.1	基于 AS-IMM 的最优贝叶斯估计	208

7.4.2	AS-IMM 的模型概率	209
7.4.3	AS-IMM 状态估计	210
7.4.4	AS-IMM 方程	210
7.5	杂波环境下的目标跟踪平滑	211
7.5.1	增广状态 PDA 平滑的贝叶斯模型	212
7.5.2	AS-PDAS 的跟踪波门	212
7.5.3	增广状态 PDA 平滑方程	213
7.6	目标存在性不确定的平滑	214
7.6.1	目标存在性增广递推	214
7.6.2	增广状态 AS-IPDA 平滑递推	216
7.6.3	AS-IPDA 平滑方程	217
7.7	演示实例	218
7.7.1	仿真场景	218
7.7.2	增广状态卡尔曼平滑器	219
7.7.3	增广状态 PDA 平滑器	220
7.7.4	增广状态 IPDA 平滑器	221
7.8	小结	222
第 8 章	基于延时、乱序观测的目标跟踪	223
8.1	OOSM 问题的最优贝叶斯解	223
8.1.1	目标运动模型及传感器观测方程	223
8.1.2	最优贝叶斯滤波	224
8.2	单步和多步乱序观测算法	226
8.2.1	Y-算法	226
8.2.2	M-算法	227
8.3	多步延迟 OOSM 增广状态卡尔曼滤波	227
8.3.1	迭代 AS-KF	229
8.3.2	变维增广状态卡尔曼滤波	229
8.4	杂波环境多步 OOSM 增广状态 PDA 滤波	230
8.4.1	OOSM 增广状态 PDA 滤波的杂波模型	230
8.4.2	增广状态 PDA 滤波	231
8.4.3	迭代 AS-PDA 算法	231
8.4.4	AS-PDA 方程	233
8.5	仿真结果	234
8.5.1	例 8.1	235

8.5.2	例 8.2	237
8.5.3	例 8.3	239
8.6	小结	241
第 9 章	实用目标跟踪算法	242
9.1	简介	242
9.2	线性多目标跟踪	243
9.3	杂波观测密度估计	246
9.4	航迹初始化	249
9.4.1	单点航迹初始化	251
9.4.2	两点差分法	251
9.4.3	$P_{k k,i}^0$ 的计算	253
9.4.4	新航迹初始化的观测选择	254
9.5	航迹合并	255
9.5.1	航迹合并检验	256
9.5.2	航迹合并实施	257
9.6	演示实例	257
9.6.1	单目标跟踪仿真研究	259
9.6.2	多目标跟踪仿真研究	263
9.7	小结	266
附录 A	数学和统计学预备知识	267
A.1	概率法则和分布	267
A.1.1	样本空间及事件	267
A.1.2	概率、条件概率和独立	268
A.1.3	乘法定理	270
A.1.4	全概率公式	270
A.1.5	随机变量	270
A.1.6	离散随机变量	271
A.1.7	连续随机变量	271
A.1.8	期望值	271
A.1.9	联合、边缘以及条件分布	272
A.1.10	贝叶斯公式和查普曼-科尔莫戈罗夫等式	272
A.2	马尔可夫链	274
A.3	δ 函数	274

A.4	高斯分布定理	275
附录 B	有限集统计学(FISST)	276
B.1	引言	276
B.2	目标动态和传感器的随机集模型	276
B.3	传感器模型的信度质量函数	276
B.4	目标运动模型的信度质量函数	276
B.5	有限集统计数学的基础	277
B.6	集积分	277
B.7	集微分	278
B.8	似然函数及马尔可夫密度计算	278
B.9	有限集统计学微积分基本准则	278
B.9.1	加法准则	279
B.9.2	乘法准则	279
B.9.3	常数准则	279
B.9.4	链式准则	279
B.9.5	幂准则	279
附录 C	目标跟踪中的伪函数	280
C.1	卡尔曼滤波预测	280
C.2	测量预测	280
C.3	卡尔曼滤波估计	280
C.4	高斯混合	280
C.5	单目标跟踪的数据关联	281
C.6	多目标跟踪的数据关联	281
C.7	交互式多模型混合步骤	282
参考文献	283

第 1 章 目标跟踪简介

目标跟踪是指利用传感器观测确定目标位置、轨迹和特性的问题。传感器可以是任何观测设备,如雷达、声纳、激光雷达、摄像机、红外传感器、麦克风、超声波或者其他可以用来收集目标信息的传感器。目标跟踪的典型目标是确定目标的数目、身份以及目标的状态,如位置、速度以及特征等。利用雷达对飞机进行跟踪是一个典型的应用实例,目标跟踪利用从雷达获取的观测信息,试图确定雷达监视区域中飞机的数量、类型(如军用、商用或娱乐用飞机)、身份,以及速度和位置。

由于面临着一系列不确定性问题,目标跟踪成为一个十分艰巨的任务。例如:目标运动经常伴随随机干扰,传感器可能出现目标漏检,传感器观测区域中的目标数目随机变化,传感器观测受随机噪声干扰,传感器观测数目随时间变化且不可预测,目标可能相距较近而传感器无法分辨,有时即使观测区域没有目标传感器仍会提供观测数据等问题。本书后续章节将对目标跟踪中面临的这些问题分为几种不同类型的不确定性问题的。

本章介绍贝叶斯法则这一看似简单却超级强大的统计分析工具,它促成了不确定性问题中的递归推理和估计,与 Chapman - Kolmogorov 原理一起,构成本书推导目标跟踪算法的理论基础。

1.1 目标跟踪问题综述

典型目标跟踪中的基本问题是目标状态估计问题,利用受噪声干扰并有虚假观测的测量数据,估计目标的运动学参数,如位置、速度和加速度。跟踪系统通常包括一个或多个待跟踪的目标、一个测量目标的某些参数的传感器、一个信号处理器和一个信息处理器,如图 1.1 所示。

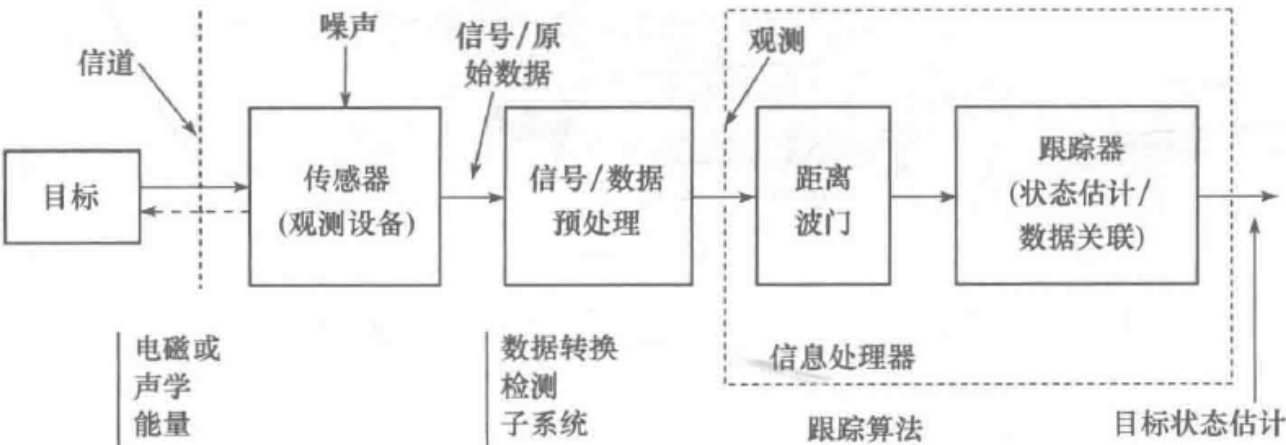


图 1.1 典型的目标跟踪系统

目标跟踪有着广泛的应用,下面介绍其中一些典型的应用实例。

1.1.1 空域监视

利用雷达跟踪飞机(Krause, 1995^[82])是一个重要的目标跟踪问题,如空中交通控制系统。雷达目标跟踪在军事监视系统中也获得了广泛的应用,其中涉及飞机的类型、身份、速度、位置以及目标意图的确定,以对监视态势进行判决,如目标是否具有威胁等。雷达能够提供相当广泛的观测能力,从纯距离测量到高分辨成像,它利用反射波测量目标的方向、距离以及径向速度。雷达发射机向外辐射电磁波,目标反射后被接收机接收并进行目标检测(图 1.2)。航迹从雷达接收的数据中提取,并常与目标发射信号一起在显示屏中显示。

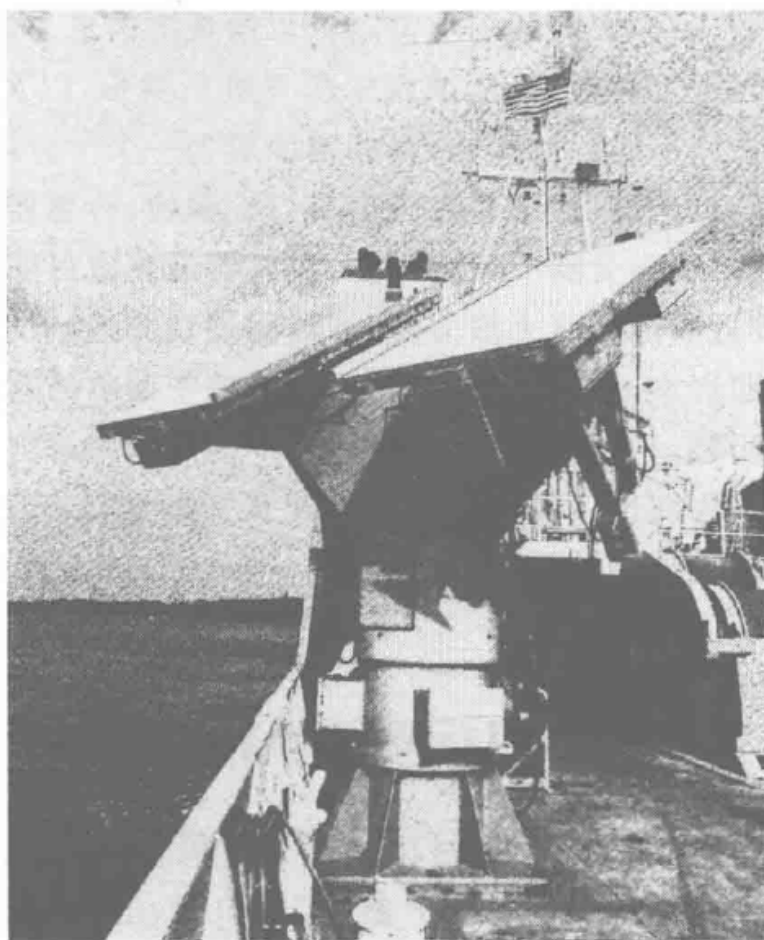


图 1.2 雷达传感器

雷达观测数据源的不确定性使飞机目标跟踪问题变得尤其困难,飞鸟、走兽、植物、地物、云、海、雨、雪以及其他雷达产生的信号均可能产生信号噪声,即杂波。杂波是指那些不是来自感兴趣目标的检测结果。确定哪些检测结果属于感兴趣目标并用来提取目标航迹的问题称为数据关联问题,将在第 4 章以及后续章节中讨论。

飞机目标经常机动飞行,跟踪这类目标需要设计精细的处理方法,自适应地切换目标动态模型以适应目标动作的变化。第 3 章将介绍几种机动目标跟踪方法,讨论解决此类问题的有效算法。

在空中目标监视任务中,经常出现数量十分巨大并且空间密集分布的飞机目

标,这导致多目标跟踪问题的出现(如 Hwang 等,2004^[74])。多目标跟踪的主要困难是,如何确定哪个观测属于哪一个目标,而雷达经常会产生虚假观测并且对于真实目标并不是总能提供观测。这迫使单目标跟踪问题被推广,使用更加复杂的概率模型。第 5 章和第 6 章介绍多目标跟踪问题的解法。

1.1.2 视频监控

基于数字视频信息的监视问题正处于大力发展阶段,在机场、楼宇、银行、仓库、赌场、火车站、高速公路、街道、体育场、人员密集区域以及所有政府办公机构的安全保卫工作中发挥着重要作用。视频监控在社会的各个部门中均用来提高公共安全、阻止犯罪行为的发生。随着高速宽带有线/无线网络的发展,许多机构均布置大型摄像机网络进行视频监控(图 1.3)。如在重要城市的大型建筑物内安装大型摄像机网络,主要监测点包括建筑物主要入口、楼层、大型聚会地点、电梯、走廊、实验室和办公室等。经受专业训练的保安可通过这种监视网络对主要保护区域进行视频监控,该系统中需要安装运行可以很好利用监视网络收集海量视频数据的智能化软件,这一需求吸引着越来越多的研究和开发人员从事智能视频监控软件的开发(Olsen 和 Brill, 1997^[134]; Wren 等, 1997^[165]; Boult, 1998^[32]; Lipton 等, 1998^[97]; Tan 等, 1998^[152]; Collins 等, 2000^[49]; Haritaoglu 等, 2004^[61])。



图 1.3 视频影像中的观测提取

(a) 背景影像; (b) 背景和前景; (c) 斑点提取; (d) 加框作为传感器观测。

在视频图像中检测和跟踪人或者交通工具,并进一步推断其行为,如非常规动作、闲逛甚至犯罪行为,需要解决一些非同寻常的技术难题(Hu 等,2004^[74])。美

国军方在 1997 年资助了视频监视与控制 (VSAM) 项目 (Collins 等, 2000^[49]), VSAM 的研究目的使得值班人员能够比较轻松地完成诸如战场复杂区域的行为监控。2000 年, 又资助了一个叫做人员身份远程识别 (HID) 的项目, 开发了一种集合多种模式和技术 的监视系统, 以实现人员身份的远程识别。一些智能系统已经在人群估计中得到应用实现, 如在伦敦 (Davies 等, 1995^[53]) 和热那亚 (Regazzoni 等, 1993^[140]; Regazzoni 和 Tesei, 1996^[139]) 火车站即安装了利用现有闭路电视 (CCTV) 的实时人群估计系统。

当人或物体进行非常规运动时, 系统的跟踪就会被打断。视频跟踪背景中, 传统的跟踪方法中还存在许多其他的问题, 如某些动作或光线的出现常导致观测失真的问题, 当某一物体出现在摄像头与另一物体之间时常导致遮挡问题等。当目标隐藏时, 摄像头无法提供图像从而导致航迹丢失。当两个行人分开时, 如何实现原有航迹与新观测的关联也是一件不太容易的事情。

如此种种雷达跟踪中不常出现的问题大大增加了建立鲁棒视频跟踪方法的难度, 由此引发了一些挑战性的研究工作, 如概率数据互联滤波器 (PDAF) 和联合概率数据互联滤波器 (JPDAF), 其中需要考虑观测数据中的噪声和杂波问题, 这是两种处理数据关联问题的有效算法。Rasmussen 和 Hager (2001^[137]) 对这两种算法进行了调整并在视频跟踪问题中实现了很好的应用。

1.1.3 气象监控

为了实现天气预报, 气象局需要使用多种技术。气象气球的跟踪是其中一种重要技术 (图 1.4), 它能提供高空风速、气压、湿度和温度等信息。气象局每天都要间断地释放 50 ~ 70 个气球, 在异常天气情况, 释放气球数则会相应增加, 从而获得准确天气预报所需要的更多信息。为了获得不同大气层的气候相关参数, 需要对每个气象气球进行跟踪。

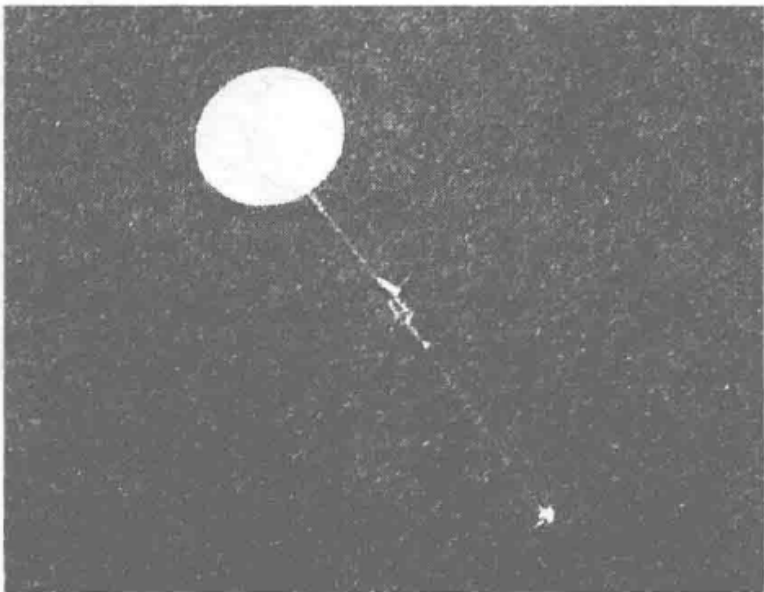


图 1.4 气象监测气球 (NASA)

利用地面雷达对气球进行跟踪是一个简单有效的方法,但也受到一定的限制,即气球轨迹的初始段不在雷达观测范围之内。因此,操作员需要先对气球进行人工跟踪,直到其到达一定高度,雷达再对它进行自动跟踪。另一种方法是在气球中安装 GPS 定位设备,然而由于气球不能回收,这将增加设备成本,何况要全天不断地释放气球,使用 GPS 设备将使运行费用变得异常巨大。

一个聪明的做法是另外建立一种气球初始轨迹的自动跟踪方法,然后再用地面雷达进行跟踪,一旦气球到达足够高度。为了实现这一目的,在气球上加挂无线电探空仪,它向三个地面站发送同步脉冲,地面站通过测量同步脉冲的时延估计距离并利用三角定位原理对气球位置进行滤波估计。当气球上升至一定高度,地面雷达则锁定气球并继续对其进行自动跟踪。

1.1.4 细胞生物学

药学家和病理学家在研究人类、动物、植物以及昆虫时,需要对生物细胞的出生、死亡以及活动情况进行例行考察。从免疫学角度看,生物体的免疫响应与淋巴细胞的生命周期相关。感兴趣的参数是每一代细胞的分裂/出生和死亡时间。生育能力研究中,则关心精细胞的速度或形状。为了研究抗炎症问题,研究者们要精心准备这些细胞并定期对其进行拍照,提取淋巴细胞的速度和加速度信息(图 1.5)。有时需要连续观察好几天,然后对图片进行人工处理,检查每幅照片并提取需要的速度、分裂和死亡时间等信息。这一过程不仅极为耗时,而且很难操作,容易出错,某些情况几乎是不可实现的。这一问题实际上可以归结为基于图像序列的细胞跟踪问题,细胞的分裂和死亡则可以视为航迹的起始和终结事件。这样问题变得快捷可靠,而且使以前无法观测的现象也成为可以研究的问题。关键的概念是定义细胞身份识别和跟踪的数据关联参数,利用细胞免疫学的知识对细胞的分裂/出生和死亡建模,并整合到贝叶斯递推框架中。

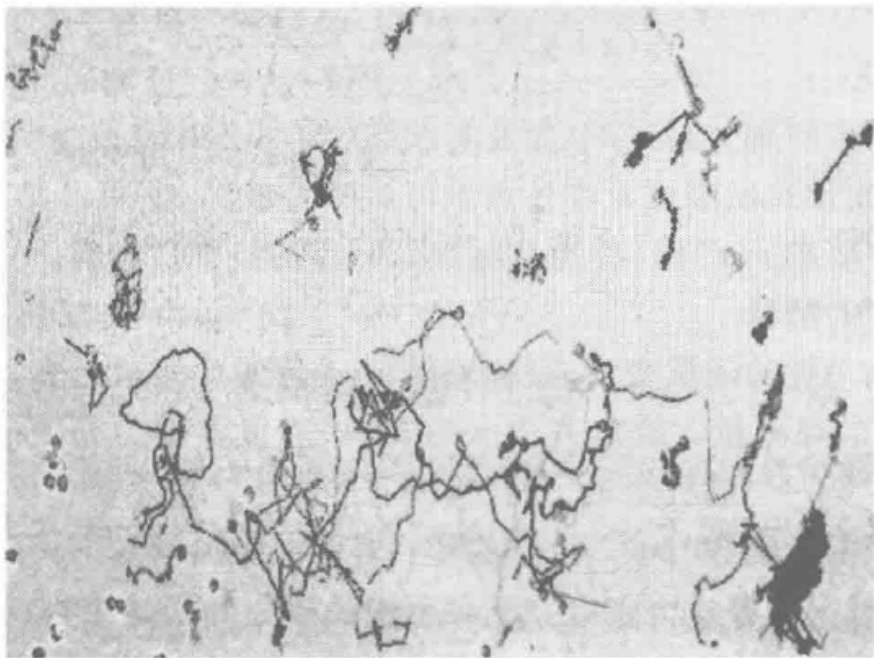


图 1.5 淋巴细胞跟踪

1.2 贝叶斯推理及其在目标跟踪中的应用

贝叶斯方法是一个充分发展的概率与统计理论,可以用来对目标跟踪中的诸多问题进行建模和求解。它在统计与工程领域有着非常广泛的应用,工程技术人员很久以来一直使用这一方法来解决各种不同的问题。

在大多数目标跟踪问题(如 1.1 节中介绍的应用)中,传感器观测在时间上以序列的方式出现。在每一个观测时刻,新信息与当前目标状态估计进行结合,获得目标状态的新估计;而最后时刻的状态则又被下一时刻接收的新信息更新,依此递推,一直进行下去。贝叶斯原理的递推形式为处理观测数据及其不确定性的序贯特性提供了合理的理论框架。贝叶斯定理是贝叶斯递推方法的基础,它为贝叶斯范式的建立奠定了数学的和概念性的基石。贝叶斯定理的历史要追溯到 18 世纪和 19 世纪前叶 Thomas Bayes (1764 年)和 Pierre - Simon de Laplace (1812 年)的工作。这一原理被冷落了很长一段时间,直至 20 世纪后半段,对贝叶斯方法的研究急速增长,发现了许多应用这一方法的科学、工程以及统计推理领域。Stigler 在 1986 年对贝叶斯思想进行了历史性的总结。

1.2.1 贝叶斯定理

贝叶斯定理是利用概率论中的条件概率一致地调和过去与当前信息的理论框架。对于两个相关的事件 x 和 y ,给定事件 y 的观测,事件 x 的条件概率为

$$p(x|y) = \frac{p(x,y)}{p(y)} \quad (1.1)$$

它等于由事件 y 的无条件概率 $p(y)$ 归一化的事件 x 和 y 的联合概率 $p(x,y)$ 。式(1.1)使用两次,贝叶斯定理可重新写为

$$p(x|y) = \frac{p(y|x)p(x)}{p(y)} \quad (1.2)$$

目标跟踪中的许多问题,如目标个数及其状态,均可由事件 x 建模,而各种类型的传感器的输出,如雷达回波或者红外图像可建模为事件 y 。贝叶斯定理式(1.2)则可用于获得条件概率 $p(x|y)$,作为目标跟踪问题的概率性的解。

贝叶斯定理的解释

以 x 表示感兴趣的随机变量,目标跟踪中, x 通常代表被考察目标的状态。以 y 表示与 x 相关的观测量。给定关于 y 的知识,这里要做的是更新现有的关于 x 的知识。由于 x 是一个随机变量,并且用概率的方法处理不确定性问题,因此以概率分布或者概率密度函数(pdf) $p(x)$ 的形式表示关于 x 的知识。 $p(x)$ 是 x 的一个函数,给变量 x 分配概率。大多数目标跟踪中的核心问题是在更新 $p(x)$ 时如何考虑新信息 y 。答案由式(1.2)中 $p(x|y)$ 给出,即给定 y 时 x 的条件分布。将 x 看作有一定取值范围的随机变量,可以看到,对于固定的 y ,通过 $p(y|x)$, $p(x)$ 被变换

为 $p(\mathbf{x}|\mathbf{y})$ 。一旦 \mathbf{y} 已知, $p(\mathbf{y})$ 的影响可以忽略, 因为对于所有的 \mathbf{x} 来说, $p(\mathbf{y})$ 取值均一样。正是这一理论上合理的对任意可能 \mathbf{x} 的概率 $p(\mathbf{x})$ 的变换, 使得可以用 $p(\mathbf{x}|\mathbf{y})$ 代替 $p(\mathbf{x})$, 对 \mathbf{x} 进行概率描述, 即用 $p(\mathbf{y}|\mathbf{x})$ 对原始的概率分布进行加权。这一看似简单的操作, 实际上是许多动力学过程中参数估计复杂算法的核心。当表达式 $L(\mathbf{x}) = p(\mathbf{y}|\mathbf{x})$ 被视为 \mathbf{x} 的一个函数时, 则将其称为似然函数。据前所述, 可以写出下式:

$$p(\mathbf{x}|\mathbf{y}) \propto p(\mathbf{y}|\mathbf{x})p(\mathbf{x})$$

这表明, $p(\mathbf{x}|\mathbf{y})$ 正比于 $p(\mathbf{y}|\mathbf{x})$ 和 $p(\mathbf{x})$ 的乘积。 $p(\mathbf{y})$ 相对于 \mathbf{x} 来说是一个常量, 因此这里通常将其称为归一化常量或归一化因子, 其作用是确保 $p(\mathbf{x}|\mathbf{y})$ 对 \mathbf{x} 求和或积分的结果等于 1。初始分布 $p(\mathbf{x})$ 通常称为先验分布, 而 \mathbf{x} 的新分布 $p(\mathbf{x}|\mathbf{y})$ 则称为后验分布。

考虑单目标问题, 假设其状态可由一维向量 \mathbf{x} 描述, 当前时刻关于 \mathbf{x} 的知识包含在如下概率密度函数之中:

$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{\Sigma_0 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^2}{2\Sigma_0^2}}$$

这也就是说, 我们认为 \mathbf{x} 在 \mathbf{x}_0 附近, 并且估计误差的性质由 Σ_0 描述。可假设这一正态分布(高斯分布)由先前的计算而得。此分布又可表示为 $p(\mathbf{x}) = N(\mathbf{x}; \mathbf{x}_0, \Sigma_0^2)$ 。 Σ_0 越大, 说明掌握的关于 \mathbf{x} 的知识确定性越差。假设 \mathbf{y} 为某传感器关于 \mathbf{x} 的一个观测, 传感器观测通常带有噪声, 可将其描述为

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{w}, p(\mathbf{w}) = N(\mathbf{w}; 0, \Sigma^2)$$

观测噪声 \mathbf{w} 的统计模型为零均值方差为 Σ^2 的高斯分布。由高斯分布的基本性质(参见 Hogg 和 Craig, 1995^[71]), 可得似然函数 $L(\mathbf{x}) = p(\mathbf{y}|\mathbf{x})$ 为

$$p(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = \frac{1}{\Sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\mathbf{y}-\mathbf{x})^2}{2\Sigma^2}}$$

依据贝叶斯定理, 很容易求得后验分布为 $p(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = N(\mathbf{x}; \hat{\mathbf{x}}, \hat{\Sigma}^2)$, 其中

$$\hat{\mathbf{x}} = \left(\frac{\mathbf{x}_0}{\Sigma_0^2} + \frac{\mathbf{y}}{\Sigma^2} \right) \left[\frac{1}{\Sigma_0^2} + \frac{1}{\Sigma^2} \right]^{-1}$$

$$\hat{\Sigma}^2 = \left[\frac{1}{\Sigma_0^2} + \frac{1}{\Sigma^2} \right]^{-1}$$

图 1.6 以实例说明了不同传感器观测所对应不同的似然函数, 如何影响由先验分布产生后验分布的过程。其中, 参数假设: $\mathbf{x}_0 = 23, \Sigma_0 = 4, \Sigma = 3$ 。图 1.6(a) 中, $\mathbf{y} = 4$ 导致估计 $\hat{\mathbf{x}} = 10.84$, 对应后验方差 $\hat{\Sigma}^2 = 5.76$ 。随着 \mathbf{y} 值不断变大, 似然函数漂移到右侧, 后验分布也随之拖动。表 1.1 列出了所有不同的 \mathbf{y} 值对应的 \mathbf{x} 估计值。这个估计例子中, 贝叶斯定理提供了后验分布的计算公式。

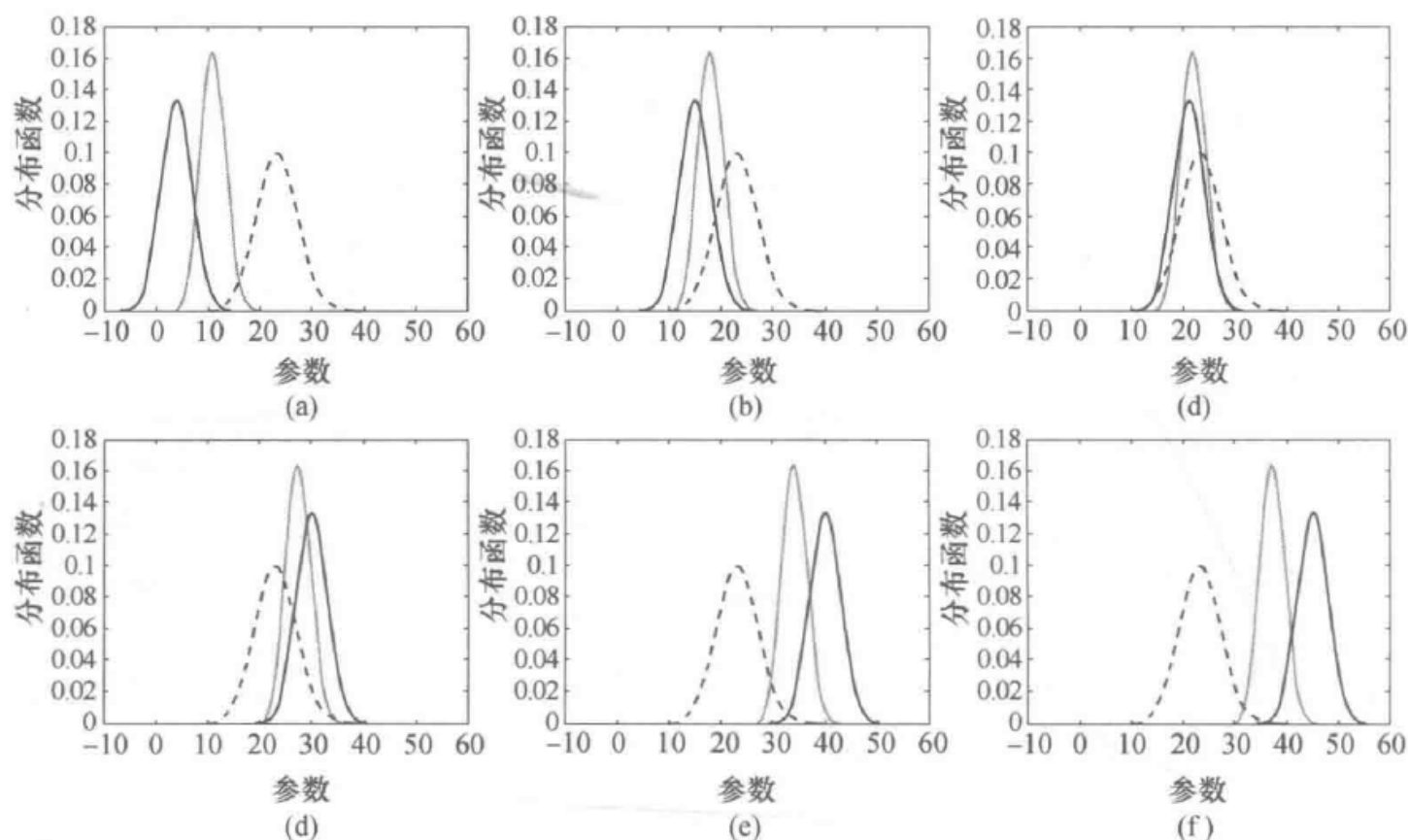


图 1.6 先验分布 $p(x)$ (虚线), 似然函数 $L(x) = p(y|x)$ (黑线) 及后验分布 $p(x|y)$ (灰线)
(a) $y = 4$; (b) $y = 15$; (c) $y = 21$; (d) $y = 30$; (e) $y = 40$; (f) $y = 45$ 。

表 1.1 不同观测值 y 对应 x 的估计和方差

对不同数据的估计	$y = 4$	$y = 15$	$y = 21$	$y = 30$	$y = 40$	$y = 45$
\hat{x}	10.84	17.88	21.72	27.48	33.88	37.08
$\hat{\Sigma}^2$	5.76	5.76	5.76	5.76	5.76	5.76

图 1.7 是二维空间中先验分布与后验分布的演示实例, 其中包含连续两次递推估计的后验分布。二维情况考察的是目标在二维平面内的坐标位置, 图中较为扁平的是目标的先验分布, 代表关于向量 x 的先验知识。当收到第一批数据之后, 依据贝叶斯定理计算后验分布, 由图 1.7 可见, 本例中围绕估计值的后验分布比先验分布要更加集中, 随着更多数据的到达, 更新的后验分布则变得越发尖锐和集中。

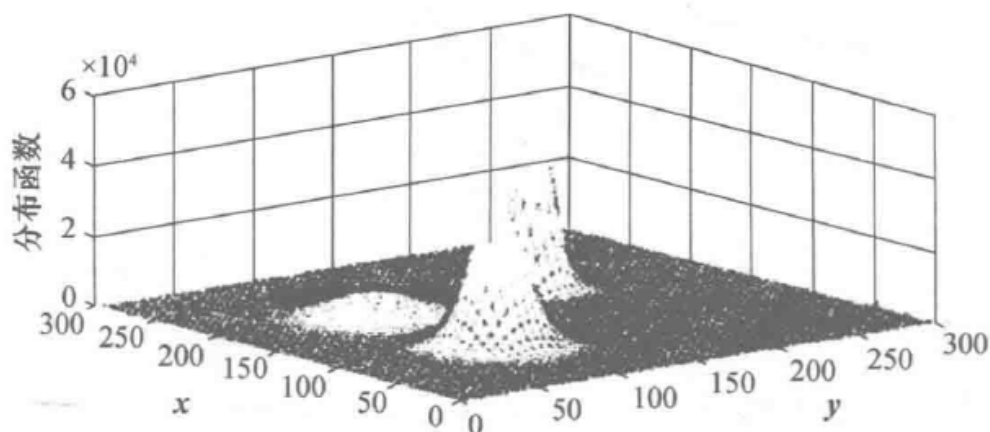


图 1.7 先验分布与后验分布

在许多工业、工程、经济以及其他应用场景中,观测数据通常在时间上重复地出现,假设时间点为 $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$, 对应的观测为 $y_1, y_2, \dots, y_k, \dots$ 。如在机器可靠性检验中,重复观察统计机器的失效次数,在检验产品质量时,记录每批检验产品中残次品的个数,都是如此。在目标跟踪中, y 代表传感器关于目标状态的观测。在每一个观测时刻,将上一时刻获得的后验分布作为新的先验分布,则建立一个递推过程:

- (1) 时刻 0, 获得任何观测数据之前, $p(x)$ 代表所有关于 x 的知识;
- (2) 时刻 t_1 , $p(x|y_1) \propto p(y_1|x)p(x)$;
- (3) 时刻 t_2 , $p(x|y_1, y_2) \propto p(y_2|y_1, x)p(x|y_1)$;
- (4) 时刻 t_k , $p(x|y_1, y_2, \dots, y_{k-1}, y_k) \propto p(y_k|y_{k-1}, \dots, y_1, x)p(x|y_1, \dots, y_{k-1})$ 。

将式(1.1)应用于三个随机事件(x, y 和 z)的情况,即

$$p(x|y, z) = \frac{p(x, y, z)}{p(y, z)}$$

变换事件的顺序,有

$$p(x, y, z) = p(y, x, z) = p(y|x, z)p(x, z) = p(y|x, z)p(x|z)p(z)$$

类似地有 $p(y, z) = p(y|z)p(z)$, 从而可得

$$p(x|y, z) = \frac{p(y|x, z)p(x|z)p(z)}{p(y|z)p(z)}$$

消除分子和分母中的 $p(z)$, 并注意到 $p(y|z)$ 与 x 无关, 可得

$$p(x|y, z) \propto p(y|x, z)p(x|z)$$

对于每一个 $k = 1, 2, \dots$, 令 $x = x, y = y_k, z = \{y_1, \dots, y_{k-1}\}$, 从而有

$$p(x|y_1, y_2, \dots, y_{k-1}, y_k) \propto p(y_k|x, \{y_1, \dots, y_{k-1}\})p(x|\{y_1, \dots, y_{k-1}\})$$

重新组织各项得

$$p(x|y_k, \{y_1, \dots, y_{k-1}\}) \propto p(y_k|x, \{y_1, \dots, y_{k-1}\})p(x|\{y_1, \dots, y_{k-1}\})$$

递推贝叶斯解即通过计算 t_{k-1} 时刻的后验分布 $p(x|y_1, \dots, y_{k-1})$, 并将其作为新的先验分布, 以计算 t_k 时刻的后验分布 $p(x|y_1, \dots, y_{k-1}, y_k)$ 。本书后续章节中, 即使用这一递推方法推导各种跟踪算法。目标跟踪中, 由于目标状态 x 随时间而变, 因此还需要额外的步骤才能实现后验分布的推导, 然而, 利用某一时刻的后验分布推导下一时刻的后验分布这一思想是推导目标跟踪通用贝叶斯解的基本思路。下面给出这种递推形式的目标跟踪最优贝叶斯解的推导过程。

1.2.2 贝叶斯定理在目标跟踪中的应用

在目标跟踪中, 关于目标状态的全部概率知识可由联合概率密度函数 $p(S^k) = p(S_k, \dots)$ 表示, 其中 $p(S^k) = p(S_k, S_{k-1}, \dots, S_0)$ 指广义的目标状态, S_k 代表 t_k 时刻单目标或多目标的状态、数目、身份, 或者所有这些信息的组合, 时刻 t_k 常

简记为 k 。记传感器输出为 $\mathbf{y}^k = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_k)$, \mathbf{y}_i 为 i 时刻的观测。当观测 \mathbf{y}^k 与目标状态 \mathbf{S}^k 之间的物理关系确定时,而关于目标状态的知识可由概率密度函数 $p(\mathbf{S}^k)$ 给出,贝叶斯定理则可为状态知识 $p(\mathbf{S}^k | \mathbf{y}^k)$ 的更新提供合理的基本理论方法。由贝叶斯定理式(1.2)可得

$$p(\mathbf{S}^k | \mathbf{y}^k) = \frac{p(\mathbf{y}^k | \mathbf{S}^k)p(\mathbf{S}^k)}{p(\mathbf{y}^k)} \quad (1.3)$$

条件概率分布 $p(\mathbf{S}^k | \mathbf{y}^k)$ 即是目标状态的后验分布。 $p(\mathbf{y}^k | \mathbf{S}^k)$ 为似然函数,即给定状态序列为 \mathbf{y}^k 的情况下,观测序列为 \mathbf{S}^k 的概率。式(1.3)中第二项分子 $p(\mathbf{S}^k)$ 是目标状态 \mathbf{S}^k 的先验分布,分母 $p(\mathbf{y}^k)$ 为归一化因子,以保证概率分布函数 $p(\mathbf{S}^k | \mathbf{y}^k)$ 满足概率定理且求和结果为 1。归一化因子由下面积分公式计算:

$$p(\mathbf{y}^k) = \int_{\mathbf{S}_k} \dots \int_{\mathbf{S}_0} p(\mathbf{y}^k | \mathbf{S}_k, \dots, \mathbf{S}_0) p(\mathbf{S}_k, \dots, \mathbf{S}_0) d\mathbf{S}_k \dots d\mathbf{S}_0$$

这里用 \int 代表广义的积分,包含求和运算和传统积分运算。例如,如果状态 \mathbf{S}_k 既包含连续状态 $\mathbf{x}_k = \{x_1, \dots, x_i\}$ 又有离散状态。 $\mathbf{r}_k = \{r_1, \dots, r_j\}$, 即 $\mathbf{S}_k = \{x_1, \dots, x_i, r_1, \dots, r_j\}$, 那么积分则代表如下运算:

$$\int_{\mathbf{S}_k} (\cdot) d\mathbf{S}_k = \int_{x_1} \int_{x_2} \dots \int_{x_i} \sum_{r_1} \dots \sum_{r_j} (\cdot) dx_1 dx_2 \dots dx_i$$

贝叶斯定理在目标跟踪中的应用使得目标状态的更新可通过先验联合密度与似然函数相乘并归一化实现。式(1.3)给出了基于观测序列 \mathbf{y}^k 的知识计算状态序列 \mathbf{S}^k 分布的方法。但是,观测通常在时间上以序列的方式出现。需要在每一个观测时刻都能对目标状态进行更新,保证所有信息一旦接收即被处理以获得当前时刻最为精确的估计与预测。式(1.3)的贝叶斯解法可以进一步拓展为递推的形式,利用最新的观测 \mathbf{y}_k ,更新 $k-1$ 时刻计算的目标状态条件分布 $p(\mathbf{S}^{k-1} | \mathbf{y}^{k-1})$,从而得到 k 时刻目标状态的条件分布 $p(\mathbf{S}^k | \mathbf{y}^k)$ 。考察直到 k 时刻的观测集合 $\mathbf{y}^k = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_k)$, \mathbf{y}_i 为 i 时刻的观测,由式(1.1)可得式(1.3)中各项,即

$$p(\mathbf{y}^k | \mathbf{S}^k) = p(\mathbf{y}_k, \mathbf{y}^{k-1} | \mathbf{S}^k) = p(\mathbf{y}_k | \mathbf{y}^{k-1}, \mathbf{S}^k) p(\mathbf{y}^{k-1} | \mathbf{S}^k)$$

$$p(\mathbf{S}^k) = p(\mathbf{S}_k, \mathbf{S}^{k-1}) = p(\mathbf{S}_k | \mathbf{S}^{k-1}) p(\mathbf{S}^{k-1})$$

$$p(\mathbf{y}^k) = p(\mathbf{y}_k, \mathbf{y}^{k-1}) = p(\mathbf{y}_k | \mathbf{y}^{k-1}) p(\mathbf{y}^{k-1})$$

由因果性原理,显然 $k-1$ 时刻的观测与 k 时刻之后的目标状态无关,从而有 $p(\mathbf{y}^{k-1} | \mathbf{S}^k) = p(\mathbf{y}^{k-1} | \mathbf{S}^{k-1})$, 由此似然函数简化为

$$p(\mathbf{y}^k | \mathbf{S}^k) = p(\mathbf{y}_k | \mathbf{y}^{k-1}, \mathbf{S}^k) p(\mathbf{y}^{k-1} | \mathbf{S}^{k-1})$$

代入式(1.3),可得

$$p(\mathbf{S}^k | \mathbf{y}^k) = \frac{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{y}^{k-1}, \mathbf{S}^k) p(\mathbf{y}^{k-1} | \mathbf{S}^{k-1}) p(\mathbf{S}_k | \mathbf{S}^{k-1}) p(\mathbf{S}^{k-1})}{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{y}^{k-1}) p(\mathbf{y}^{k-1})}$$

重新组合上式右边各项, 贝叶斯解可重新写为

$$p(S^k | y^k) = \frac{p(y_k | y^{k-1}, S^k) p(S_k | S^{k-1})}{p(y_k | y^{k-1})} \left\{ \frac{p(y^{k-1} | S^{k-1}) p(S^{k-1})}{p(y^{k-1})} \right\}$$

不难看出, 上式大括号中为目标状态的先验联合概率密度函数, 即

$$\frac{p(y^{k-1} | S^{k-1}) p(S^{k-1})}{p(y^{k-1})} = p(S^{k-1} | y^{k-1})$$

从而可给出贝叶斯解的递推形式为

$$p(S^k | y^k) = \frac{p(y_k | y^{k-1}, S^k) p(S_k | S^{k-1})}{p(y_k | y^{k-1})} p(S^{k-1} | y^{k-1})$$

通常给定时刻的观测仅与当前时刻的目标状态相关, 且与其他时刻的目标观测条件独立, 基于这一假设, 观测的似然函数 $p(y_k | y^{k-1}, S^k)$ 简化为 $p(y_k | S_k)$ 。

在目标跟踪中, 经常需要作出一些简化的假设, 以建立适当的概率框架下的模型。许多实际系统通常遵循马尔可夫性质, 即给定最后状态, 系统当前状态与之前的状态无关。在目标跟踪系统中, 这意味着状态 S_k 仅与 S_{k-1} 有关, 而与 (S_{k-2}, \dots, S_0) 无关。从而有 $p(S_k | S^{k-1}) = p(S_k | S_{k-1})$, 继而可得目标跟踪问题的递推贝叶斯解为

$$p(S^k | y^k) = \frac{p(y_k | S_k)}{p(y_k | y^{k-1})} p(S_k | S_{k-1}) p(S^{k-1} | y^{k-1}) \quad (1.4)$$

基于递推贝叶斯解即式(1.4), 可获得最新观测 y_k 之后 k 时刻的后验条件分布 $p(S^k | y^k)$ 。在目标跟踪中, 目标的状态和数目是需要知道的两个重要信息, 可通过对后验概率分布积分获得

$$\begin{aligned} p(S_k | y^k) &= \int_{S_{k-1}} \cdots \int_{S_0} p(S^k | y^k) dS_0 \cdots dS_{k-1} \\ &= \int_{S_{k-1}} \cdots \int_{S_0} p(S_k, S_{k-1}, \dots, S_0 | y^k) dS_0 \cdots dS_{k-1} \end{aligned}$$

由式(1.4), 上式变为

$$\begin{aligned} p(S_k | y^k) &= \frac{p(y_k | S_k)}{p(y_k | y^{k-1})} \int_{S_{k-1}} \cdots \int_{S_0} p(S_k | S_{k-1}) p(S^{k-1} | y^{k-1}) dS_0 \cdots dS_{k-1} \\ &= \frac{p(y_k | S_k)}{p(y_k | y^{k-1})} \int_{S_{k-1}} p(S_k | S_{k-1}) \int_{S_{k-2}} \cdots \int_{S_0} p(S^{k-1} | y^{k-1}) dS_0 \cdots dS_{k-1} \end{aligned}$$

由于 $p(S^{k-1} | y^{k-1}) = p(S_{k-1}, S^{k-2} | y^{k-1})$, 上式内积分 $\int_{S_{k-2}} \cdots \int_{S_0} p(S^{k-1} | y^{k-1}) dS_0 \cdots dS_{k-2}$ 简化为 $p(S_{k-1} | y^{k-1})$ 。从而, 目标状态 S_k 的基于观测数据 y^k 的后验概率密度函数为

$$p(S_k | y^k) = \frac{1}{p(y_k | y^{k-1})} p(y_k | S_k) \int_{S_{k-1}} p(S_k | S_{k-1}) p(S_{k-1} | y^{k-1}) dS_{k-1} \quad (1.5)$$

这正是大部分目标跟踪算法力求计算或逼近的条件密度。积分 $\int_{S_{k-1}} p(S_k | S_{k-1}) p(S_{k-1} | y^{k-1}) dS_{k-1}$ 为 Chapman - Kolmogorov 公式, 求解该积分即给出, 给定 $k-1$ 时刻之前(包含)的观测与状态情况下目标的预测状态。当获得 k 时刻的观测 y_k 时, 预测状态则被似然因子 $p(y_k | S_k)$ 修正并重新归一化。式(1.5)中递推关系的求解是解决目标跟踪问题的核心, 各种跟踪问题, 常因问题的约束条件、似然函数 $p(y_k | S_k)$ 的形式以及转换密度 $p(S_k | S_{k-1})$ 的不同而不同, 也因此面临不同程度的挑战。

1.3 目标跟踪的递推贝叶斯解

1.3.1 广义的目标运动方程

动力学过程的建模, 是一个在应用贝叶斯定理之前需要关注的重要问题, 在目标跟踪中, 这对应着目标动力学方程的设计和传感器观测模型的建立。

目标的运动通常由位置、速度、加速度以及其他运动学分量如角速度及其变化率等特征量描述。这些运动学分量组成目标的状态。使用一些简单的定义, 如位置分量的变化率等价于速度, 可以将目标状态的不同分量联系在一起。利用状态空间方法可完美地推导出这种模型, 包括连续或离散的情况, 本书中所有概念和观点均基于时间离散系统。在单目标跟踪问题中, 状态 S_k 可能会认为仅代表单个目标的位置 x_k , 在状态空间方法中, 则是将状态的多个分量组合为一个状态向量 x_k , 一个典型的状态向量的例子是

$$x_k = [\text{位置}, \text{速度}, \text{加速度}]_k^T$$

目标状态的维数等于状态向量中分量的个数, 这里状态维数为 3。另一个状态向量的例子为

$$x_k = [\text{位置}, \text{速度}, \text{加速度}, \text{角速度}, \text{角加速度}]_k^T$$

状态维数则为 5。目标状态即为描述目标运动的各运动学分量组成的有限维向量。

很多如目标运动等这样的可由有限维状态向量描述、受随机噪声干扰的物理过程, 均可由向量微分方程对其进行建模。假设 S_k 是 k 时刻的一个 n 维状态向量, v_k 为 m 维随机干扰向量, 这里 $m \leq n$, 可以写出如下微分方程:

$$S_k = g(S_{k-1}, v_k) \quad (1.6)$$

式中: g 为一个 n 维实向量函数, 通常为非线性, 假设其为二阶连续可微函数; v_k 通常称为系统的随机噪声输入。

1.3.2 广义的传感器观测方程

传感器是指用来观测目标状态外貌的设备, 而传感器所获得的目标观测则被

用来推断整个目标状态。观测或传感器模型决定了目标的似然函数 $p(y_k | S_k, y^{k-1})$, 因此观测的一个主要特性就是它必须是目标状态的一个函数。贝叶斯递推公式需要传感器观测满足另一个重要的特性, 即来自于目标的某一特定时刻的观测与其他时刻的观测统计独立。传感器观测方程可写成

$$y_k = l(S_k, w_k) \quad (1.7)$$

式中: w_k 是白噪声(观测误差), 它满足递推贝叶斯解所要求的各种条件。

1.3.3 广义的目标状态预测及其条件密度

对于状态方程和观测方程符合式(1.6)与式(1.7)并满足一定的正则条件的情况, 式(1.5)可进一步拓展以获得目标状态的预测及其条件密度。 k 时刻的状态预测概率密度为 $p(S_k | y^{k-1})$, 它代表给定直至 $k-1$ 时刻的所有观测时关于状态 S_k 的知识。状态 S_k 的条件密度, 或者说后验概率密度函数, 记为 $p(S_k | y^k)$, 则代表获得 k 时刻观测 y^k 之后的关于状态的更新知识。在一些复杂的跟踪问题中, 目标状态的动态方程或观测方程有可能不符合式(1.6)和式(1.7), 或者不满足正则性条件。即便如此, 目标跟踪问题的解仍可通过贝叶斯递推解即式(1.4)和式(1.5)进行推导, 推导过程因问题而异。

1.3.4 广义的目标状态预测与更新

1. 广义的目标状态转移密度

这里利用式(1.6)中的目标动力学模型推导贝叶斯解即式(1.5)中所需的转移密度 $p(S_k | S_{k-1})$ 。在没有随机输入项的情况下, 式(1.6)成为一个常微分方程, 式中 S_k 即为它的解。当存在随机输入时, 式(1.6)则是一个随机微分方程(SDE), 这里感兴趣的是 S_k 的概率密度函数。如果 v_k 是任意分布噪声, 对于动力学方程式(1.6)我们几乎束手无策。但是, 假如 v_k 是白噪声序列, 则可进行如下推论。由于 S_{k-1} 、 S_k 仅与 v_k 相关, 而与 S_{k-2}, \dots, S_0 无关, 因此式(1.6)的解是一个马尔可夫链。众所周知, 马尔可夫链由其转移密度及状态的初始条件定义。在式(1.6)所示的随机微分方程中, 转移密度为 $p(S_k | S_{k-1})$, 初始条件为 $p(S_{k-1})$ 。

假设式(1.6)的随机微分方程可解, 换句话说, 对于给定的 $S_{k-1}, g(S_{k-1}, \cdot)$ 存在连续可微的逆函数 g^{-1} , 于是 S_k 的概率密度函数, 即转移密度 $p(S_k | S_{k-1})$ 可写为

$$p(S_k | S_{k-1}) = p v_k(g^{-1}(S_k, S_{k-1})) \left| \frac{\partial g^{-1}}{\partial S_k} \right| \quad (1.8)$$

这里假设 $g^{-1}(\cdot)$ 存在, 即满足 $m = n$ 。如果 $m < n$, 则不能直接导出转移密度。不过, 将 S_k 分解为

$$S_k^T = [S_k^{(1)T} S_k^{(2)T}]$$

并根据隐函数定理(Kudryavtsev, 2011^[83]), 式(1.6)可由 $S_k^{(1)} = g^{(1)}(S_{k-1}, v_k)$ 和

$S_k^{(2)} = g^{(2)}(S_{k-1}, S_k^{(1)})$ 的形式表示, 其转移密度则由下式给出:

$$\begin{aligned} p(S_k | S_{k-1}) &= p(S_k^{(1)}, S_k^{(2)} | S_{k-1}) \\ &= p(S_k^{(2)} | S_k^{(1)}, S_{k-1}) p(S_k^{(1)} | S_{k-1}) \end{aligned}$$

由于 $S_k^{(2)}$ 只与 $S_k^{(1)}$ 、 S_{k-1} 相关, 上式中第一项由下面的狄拉克 δ 函数给出:

$$p(S_k^{(2)} | S_k^{(1)}, S_{k-1}) = \delta(S_k^{(2)} - g^{(2)}(S_{k-1}, S_k^{(1)}))$$

第二项与 v_k 相关

$$p(S_k^{(1)} | S_{k-1}) = p v_k(g^{(1)-1}(S_k, S_{k-1})) \left| \frac{\partial g^{(1)-1}}{\partial S_k^{(1)}} \right|$$

于是, $m < n$ 时, 转移密度为

$$p(S_k | S_{k-1}) = \delta(S_k^{(2)} - g^{(2)}(S_{k-1}, S_k^{(1)})) p v_k(g^{(1)-1}(S_k, S_{k-1})) \left| \frac{\partial g^{(1)-1}}{\partial S_k^{(1)}} \right| \quad (1.9)$$

2. 广义的目标状态预测密度

用式(1.8)或式(1.9)代替状态转移密度 $p(S_k | S_{k-1})$, 可得状态预测密度为

$$p(S_k | y^{k-1}) = \int_{S_{k-1}} p(S_k | S_{k-1}) p(S_{k-1} | y^{k-1}) dS_{k-1}$$

式中: $p(S_{k-1} | y^{k-1})$ 是目标状态的先验概率密度函数或者说状态条件密度, 假定其已知, 由直至 $k-1$ 时刻的所有观测 y^{k-1} 递推计算而得。

1.3.5 广义的目标状态滤波

1. 似然函数

观测器模型式(1.7)满足式(1.5)要求的两个关于观测的假设条件, 白噪声 w_k 保证了观测 y^k 的条件独立性, 而 $l(\cdot)$ 是 S_k 的一个函数则强制满足了 k 时刻观测依赖于 k 时刻状态的性质。为了由 y^k 推断 S_k , 函数 $l(\cdot)$ 必须可逆。基于以上假设, 将式(1.7)看作随机变量 w_k 的一个变换, 可求得式(1.5)中的似然函数为

$$p(y_k | S_k) = p w_k(l^{-1}(y_k, S_k)) \left| \frac{\partial l^{-1}}{\partial y_k} \right| \quad (1.10)$$

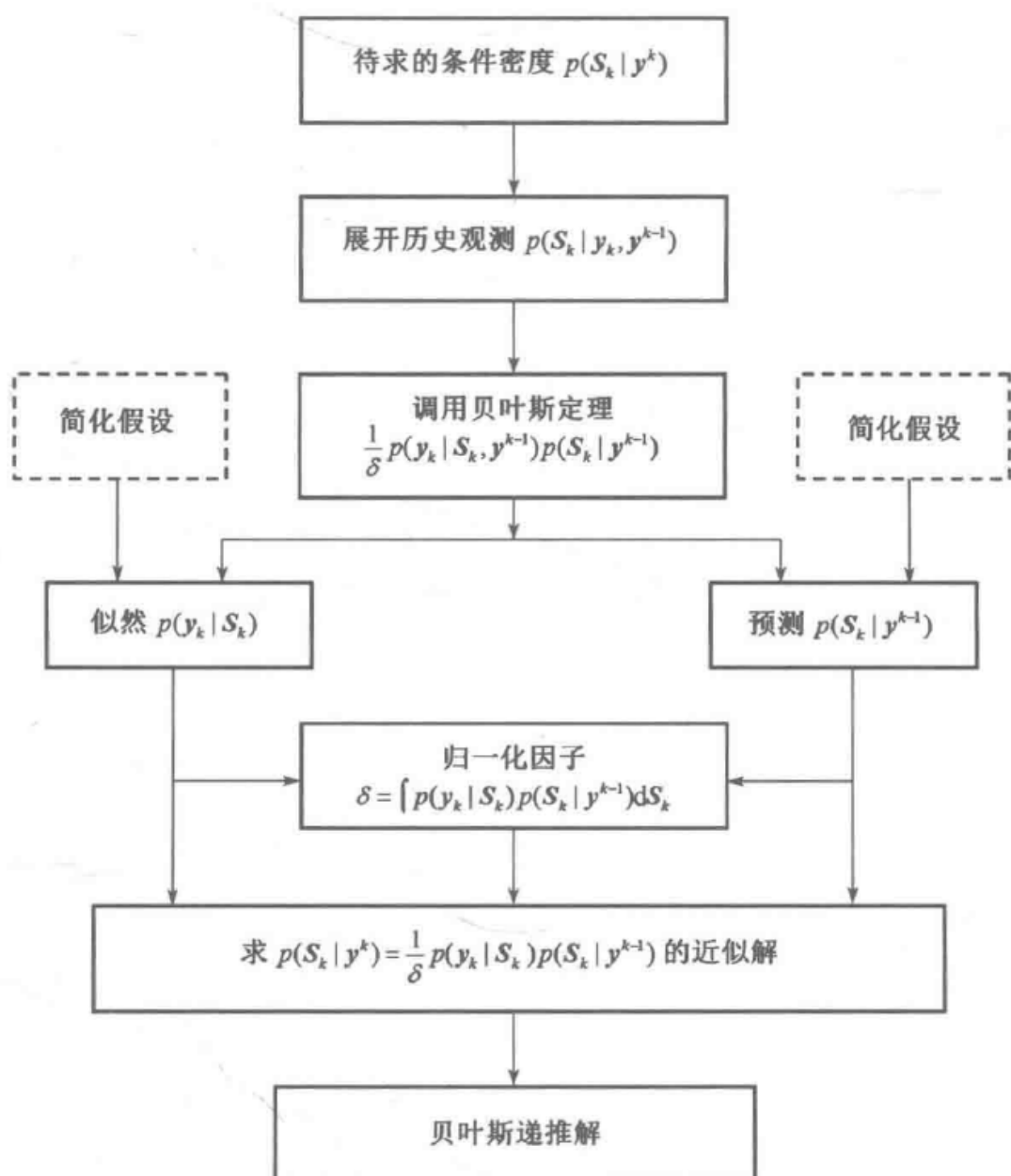
2. 归一化因子

归一化因子为

$$p(y_k | y_{k-1}) = \int_{S_k} p(y_k | S_k) p(S_k | y^{k-1}) dS_k$$

由式(1.10)代替似然函数 $p(y_k | S_k)$, 并替换预测密度 $p(S_k | y^{k-1})$, 归一化因子变成

$$p(y_k | y_{k-1}) = \int_{S_k} p(y_k | S_k) p(S_k | y^{k-1}) dS_k \quad (1.11)$$



目标跟踪的递推贝叶斯框架概览

3. 广义的目标状态条件密度

用式(1.8)或式(1.9)中的转移密度、式(1.10)中的似然函数以及式(1.11)中的归一化因子代入式(1.5),并适当化解,即可求得单目标跟踪问题中的条件密度的递推贝叶斯解。

1.3.6 广义的目标状态估计

目标跟踪中,目标状态 S_k 的数学期望 \hat{S}_k 常被作为 k 时刻目标状态的一个估计,并计算 S_k 的协方差矩阵 $P_{k|k}$,作为这一个估计精确度的度量。它们即是 k 时刻关于目标状态 S_k 的条件密度(式(1.5))的前二阶矩:

$$p(S_k | y^k) = \frac{1}{p(y_k | y^{k-1})} p(y_k | S_k) \int_{S_{k-1}} p(S_k | S_{k-1}) p(S_{k-1} | y^{k-1}) dS_{k-1}$$

利用式(1.8)、式(1.9)、式(1.10)以及式(1.11)计算上式中各项之后,即可最终获得 $p(S_k | y^k)$ 。航迹估计则为 $\hat{S}_k = E(S_k | y^k)$

$$\hat{S}_k = \int_{S_k} S_k p(S_k | y^k) dS_k$$

协方差矩阵为

$$P_{k|k} = E((S_k - \hat{S}_k)(S_k - \hat{S}_k)^T | y^k)$$

$$P_{k|k} = \int_{S_k} ((S_k - \hat{S}_k)(S_k - \hat{S}_k)^T p(S_k | y^k) dS_k$$

1.4 小 结

本章介绍了目标跟踪核心部分的若干个重要问题,讨论了贝叶斯推理在目标跟踪中的应用。贝叶斯定理的递推公式可作为推导任何目标跟踪问题的有效程式,后续章节中将做详细阐述。

第2章 滤波理论与非机动目标跟踪

本章主要介绍和推导一些著名的贝叶斯递推状态估计算法。这些滤波算法由第1章的贝叶斯递推公式(式(1.5))得到。像常用的卡尔曼滤波(KF)、扩展卡尔曼滤波(EKF)、不敏卡尔曼滤波(UKF)、点群滤波(PMF)和粒子滤波都是通过不同的模型假设来近似最优贝叶斯滤波得到的。这些滤波算法也可以看作是非机动单目标跟踪算法。

2.1 最优贝叶斯滤波

所有贝叶斯估计问题的目的是求解感兴趣参数的后验概率密度。后验概率密度包含了观测中的所有信息,可以最优地估计目标参数。在目标跟踪领域,我们感兴趣的是动态随机变化的目标状态。最优贝叶斯滤波是一种通过递推计算目标状态后验概率密度的方法。在贝叶斯框架下,通过动态参数的先验概率密度和观测似然函数来求解估计问题。目标跟踪背景下,目标动态方程决定先验概率密度,似然函数由观测方程确定。

2.1.1 目标动态方程与传感器观测方程

1. 目标动态方程

假定 $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^{n_x}$ 表示在 k 时刻的目标状态。目标动态特性由以下随机差分方程描述:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{g}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{v}_k) \quad (2.1)$$

式中: $\mathbf{g}: \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_v} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$ 是二阶连续可微函数;噪声 \mathbf{v}_k 是系统随机输入噪声,用于描述系统模型误差。随机差分方程式(2.1)描述了目标状态的先验概率密度。

2. 传感器观测方程

假定 $\mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^{n_y}$ 表示 k 时刻目标观测向量,在目标跟踪领域,传感器特性可用传感器观测模型描述:

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{l}(\mathbf{x}_k, \mathbf{w}_k) \quad (2.2)$$

式中: $\mathbf{l}: \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_w} \rightarrow \mathbb{R}^{n_y}$ 是二阶连续可微函数;随机变量 \mathbf{w}_k 表示观测误差。传感器观测方程式(2.2)构造了目标状态 \mathbf{x}_k 和观测值 \mathbf{y}_k 之间的定量关系。由观测方程可以得到似然函数 $p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k)$ 。

当 \mathbf{g} 与 \mathbf{l} 都是线性方程且随机变量 \mathbf{v}_k 和 \mathbf{w}_k 是高斯噪声时,目标状态 \mathbf{x}_k 的后

验概率密度是高斯形式的,这一点在卡尔曼滤波中可以体现出来。通常情况下,目标状态后验概率密度需要通过近似或数值计算来求解。

3. 预测与滤波

转移密度函数 $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1})$ 和似然函数 $p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k)$ 分别由目标动态方程和观测方程确定,两者用于以下条件密度的递推估计:

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}^k) = \frac{1}{p(\mathbf{y}^k | \mathbf{y}^{k-1})} p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k) \int_{\mathbf{x}_{k-1}} p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{y}^{k-1}) d\mathbf{x}_{k-1} \quad (2.3)$$

式中: $p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{y}^{k-1})$ 为 $k-1$ 时刻的后验概率密度; $p(\mathbf{y}^k | \mathbf{y}^{k-1})$ 为归一化因数。

在 $k-1$ 时刻, $p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{y}^{k-1})$ 代表在接收到观测信息 \mathbf{y}_{k-1} 之后目标状态的概率知识,在贝叶斯框架下称为先验概率密度函数或先验分布。当获得观测信息 \mathbf{y}_k 后,给定直到 k 时刻的观测信息 $\mathbf{y}^k = (\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k)$,关于目标状态的条件概率 $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}^k)$ 可以由式(2.3)计算得到,这个条件概率称为目标状态的后验概率密度函数,也称作条件分布或滤波分布。式(2.3)分两步计算目标后验概率密度:

(1) 一步预测:在先验概率密度 $p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{y}^{k-1})$ 已知条件下,利用状态转移概率密度通过 Chapman - Kolmogotov 方程求解一步预测条件概率密度:

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}^{k-1}) = \int p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{y}^{k-1}) d\mathbf{x}_{k-1} \quad (2.4)$$

在得到当前观测值 \mathbf{y}_k 前,预测概率密度 $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}^{k-1})$ 包含直到 $k-1$ 时刻关于目标状态 \mathbf{x}_k 的信息。预测概率密度可以用于任何有关 \mathbf{x}_k 问题中的推理和预测。在目标跟踪领域,感兴趣的是目标状态 \mathbf{x}_k 的预测均值和估计精度可以由 $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}^{k-1})$ 估计得到, \mathbf{x}_k 的估计精度以 \mathbf{x}_k 的方差矩阵形式描述。

(2) 滤波更新:获得当前观测值 \mathbf{y}_k 之后,通过似然函数 $p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k)$ 由式(2.3)计算得到滤波分布 $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}^k)$ 。给定直到当前时刻的观测 \mathbf{y}^k , \mathbf{x}_k 的滤波分布或后验分布包含其所有信息,通过后验分布也可以得到 \mathbf{x}_k 的后验均值和方差矩阵。

2.1.2 最优非机动目标跟踪滤波

1. 转移概率密度

大多数目标跟踪算法假定动态方程中的过程噪声为加性噪声,从而动态方程变为

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{v}_k \quad (2.5)$$

基于加性过程噪声这一假设,对动态方程式(2.1)的函数 \mathbf{g} 求逆可得 $\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k-1}) = \mathbf{x}_k - \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1})$ 。通过状态变量的转换,转移密度函数可以表示为

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) = p_{\mathbf{v}_k}(\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k-1})) |\nabla_{\mathbf{x}_k} \mathbf{g}^{-1}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k-1})| = p_{\mathbf{v}_k}(\mathbf{x}_k - \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1})) \quad (2.6)$$

2. 似然函数

大多数目标跟踪算法假定观测噪声为加性噪声,观测方程可以表示如下:

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{w}_k \quad (2.7)$$

在加性观测噪声条件下,对观测方程式(2.2)的函数 l 求逆可得 $l^{-1}(\mathbf{y}_k, \mathbf{x}_k) = \mathbf{y}_k - \mathbf{h}(\mathbf{x}_k)$ 。转换随机变量可得似然函数

$$p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k) = p_{\mathbf{w}_k}(l^{-1}(\mathbf{y}_k, \mathbf{x}_k)) |\nabla_{\mathbf{y}_k} l^{-1}(\mathbf{y}_k, \mathbf{x}_k)| = p_{\mathbf{w}_k}(\mathbf{y}_k - \mathbf{h}(\mathbf{x}_k)) \quad (2.8)$$

3. 递推滤波

将转移密度函数式(2.6)和似然函数式(2.8)代入式(2.3),可得目标状态后验概率密度(或滤波密度):

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}^k) = \frac{p_{\mathbf{w}_k}(\mathbf{y}_k - \mathbf{h}(\mathbf{x}_k)) \int p_{\mathbf{v}_k}(\mathbf{x}_k - \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1})) p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{y}^{k-1}) d\mathbf{x}_{k-1}}{\int p_{\mathbf{w}_k}(\mathbf{y}_k - \mathbf{h}(\mathbf{x}_k)) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}^{k-1}) d\mathbf{x}_k} \quad (2.9)$$

其中, $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}^{k-1}) = \int p_{\mathbf{v}_k}(\mathbf{x}_k - \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1})) p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{y}^{k-1}) d\mathbf{x}_{k-1}$ 。

式(2.9)在数学上归纳了非机动目标跟踪背景下的贝叶斯递推形式。这是求解文献中提出的各种贝叶斯跟踪算法的起点,这些算法的区别在于计算式(2.9)时使用了不同的假设,常用的假设条件有:

(A1) 目标动态和观测方程是线性的:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{F}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{v}_k \quad (2.10)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{H}\mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k \quad (2.11)$$

(A2) \mathbf{v}_k 和 \mathbf{w}_k 是均值为零且噪声协方差分别为 \mathbf{Q}_k 和 \mathbf{R}_k 的高斯白噪声。

(A3) $k-1$ 时刻后验概率密度 $p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{y}^{k-1})$ 是均值为 $\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}$ 、方差为 $\mathbf{P}_{k-1|k-1}$ 的高斯形式。

在后续章节,这些假设条件将应用于式(2.9)中来推导许多常用的算法。

2.2 卡尔曼滤波

2.2.1 卡尔曼滤波推导

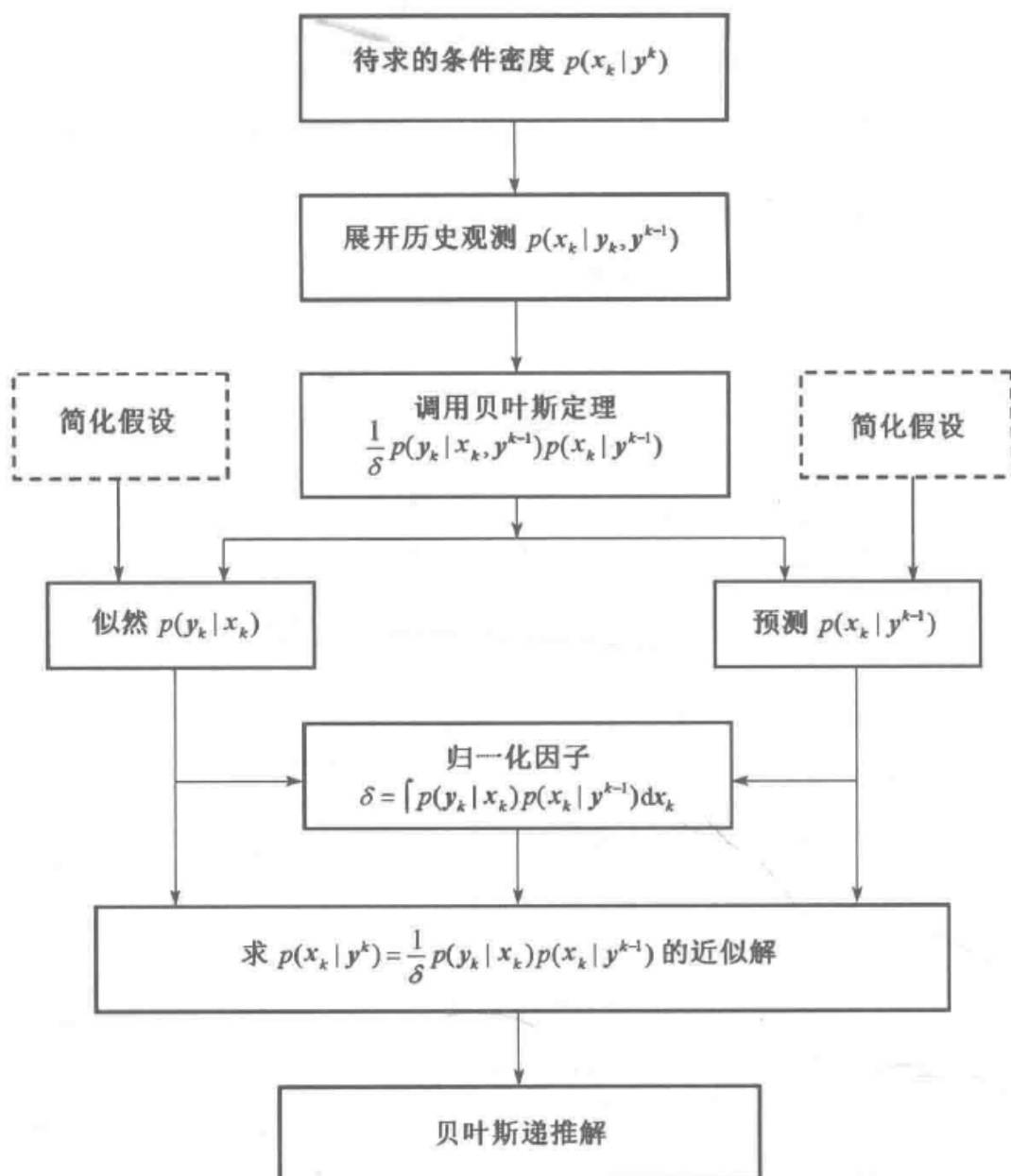
1. 卡尔曼滤波假设条件

在假设条件(A1)、(A2)和(A3)的基础上可以推导出卡尔曼滤波,目标的动态方程和观测方程是线性高斯的,且 $k-1$ 时刻的后验密度也是高斯的。

例 2.1 假定一个目标在一维空间做非机动匀速运动。 x_k 和 \dot{x}_k 分别为目标在 $t_k, t=1, 2, \dots$ 时刻的位置和速度;二维向量 $\mathbf{x}_k = [x_k, \dot{x}_k]^T$ 表示目标状态向量,基于以上假设可以直接得到目标的动态方程。假定目标运动速度恒定, t_k 时刻目标位置 x_k 可以表示成关于 $k-1$ 时刻目标位置和速度的关系式,即

$$x_k = x_{k-1} + \dot{x}_{k-1} T$$

式中: $T = t_k - t_{k-1}$ 是观测间隔且在任意时刻点 k 上是恒定的。



目标跟踪贝叶斯递推框架

由于目标运动速度完全恒定,这种假设往往很难满足,可以通过引入加性过程噪声来描述运动速度的变化。式(2.10)中状态转移矩阵可以表示为

$$F = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

在 $t_k = 1, 2, \dots$ 时刻,传感器获得带零均值高斯噪声的观测值,观测式(2.11)的观测矩阵为

$$H = [1 \quad 0]$$

本例介绍了一个简单而典型的目标动态和观测方程。大多数目标跟踪问题中,目标状态和观测向量的维数比较大。例如,目标状态向量可能包含三个方向上的位置、速度、加速度共九个分量。

在后续推导过程中,高斯密度会经常用到,它可以表示为如下形式:

$$N(\mathbf{z}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = \frac{1}{\sqrt{|2\pi\boldsymbol{\Sigma}|}} \exp[-(\mathbf{z} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{z} - \boldsymbol{\mu})/2]$$

我们将应用以下定理进行卡尔曼滤波的推导。

定理 2.1 (高斯乘积定理) 给定 $\mathbf{x}_1, \boldsymbol{\mu}_1 \in \mathbb{R}^{d_1}, \mathbf{H} \in \mathbb{R}^{d_2 \times d_1}, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^{d_2}$ 和正定矩阵 $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$:

$$N(\mathbf{x}_2; \mathbf{H}\mathbf{x}_1, \mathbf{P}_2) N(\mathbf{x}_1; \boldsymbol{\mu}_1, \mathbf{P}_1) = N(\mathbf{x}_2; \mathbf{H}\boldsymbol{\mu}_1, \mathbf{P}_3) N(\mathbf{x}_1; \boldsymbol{\mu}, \mathbf{P})$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_3 &= \mathbf{H}\mathbf{P}_1\mathbf{H}^T + \mathbf{P}_2 \\ \boldsymbol{\mu} &= \boldsymbol{\mu}_1 + \mathbf{K}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{H}\boldsymbol{\mu}_1) \\ \mathbf{P} &= \mathbf{P}_1 + \mathbf{K}\mathbf{H}\mathbf{P}_1 \\ \mathbf{K} &= \mathbf{P}_1\mathbf{H}^T\mathbf{P}_3^{-1} \end{aligned}$$

证明:上述方法的证明已经为大家所熟知,由 Ho 和 Lee 首先提出^[69]并在大量文献中出现。

2. 转移和预测密度函数

因为 p_{v_k} 是一个均值为零、方程为 \mathbf{Q}_k 的高斯密度,那么状态转移概率密度可以表示为

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) = N(\mathbf{x}_k; \mathbf{F}\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{Q}_k)$$

假定 $k-1$ 时刻目标状态后验概率密度为高斯分布,即 $p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{y}^{k-1}) = N(\mathbf{x}_{k-1}; \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \mathbf{P}_{k-1|k-1})$ 。预测概率密度为

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}^{k-1}) &= \int p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{y}^{k-1}) d\mathbf{x}_{k-1} \\ &= \int N(\mathbf{x}_k; \mathbf{F}\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{Q}_k) N(\mathbf{x}_{k-1}; \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \mathbf{P}_{k-1|k-1}) d\mathbf{x}_{k-1} \end{aligned} \quad (2.12)$$

将定理 2.1 应用于上述积分方程式(2.12),可以得到预测概率密度的表达式^①为

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}^{k-1}) &= \int N(\mathbf{x}_k; \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{P}_{k|k-1}) \times \\ &\quad N(\mathbf{x}_{k-1}; \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} + \mathbf{G}_k(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}), \mathbf{M}_k) d\mathbf{x}_{k-1} \\ &= N(\mathbf{x}_k; \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{P}_{k|k-1}) \end{aligned} \quad (2.13)$$

① 大多数介绍卡尔曼滤波和跟踪的专著中,要么用正交投影和格拉姆·施密特正交化过程(正如卡尔曼本人在经典文献[79]中所用的)。要么使用线性变换和随机变量的线性组合原理来证明预测密度是高斯密度。本书给出的是 Chapman-Kolmogorov 方程的直接解。在一维情况,Chapman-Kolmogorov 方程的解可以直接得到,然而多维情况则要复杂得多。这里采用了 Challa 和 Koks^[45]在推导卡尔曼滤波器中使用的方法。

其中

$$\begin{aligned} G_k &= P_{k-1|k-1} F^T P_{k|k-1}^{-1} \\ M_k &= P_{k-1|k-1} - G_k F P_{k-1|k-1} \\ \hat{x}_{k|k-1} &= F \hat{x}_{k-1|k-1} \\ P_{k|k-1} &= F P_{k-1|k-1} F^T + Q_k \end{aligned}$$

式(2.13)表明,当 $k-1$ 时刻的后验概率密度为高斯分布且目标动态方程为线性高斯的时,那么 $k-1$ 时刻预测概率密度也是高斯的。

这一操作即为标准卡尔曼滤波预测,其伪函数形式可写为

$$[\hat{x}_{k|k-1}, P_{k|k-1}] = KF_p[\hat{x}_{k-1|k-1}, P_{k-1|k-1}, F, Q]$$

其中

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k|k-1} &= F \hat{x}_{k-1|k-1} \\ P_{k|k-1} &= F P_{k-1|k-1} F^T + Q \end{aligned}$$

3. 似然函数与归一化因子

$p_{w_k}(\cdot)$ 是零均值、方差为 R_k 的高斯密度,似然函数式(2.8)满足 $p(y_k | x_k) = N(y_k; Hx_k, R_k)$ 。贝叶斯递推公式中归一化参数可以表示为

$$\begin{aligned} p(y^k | y^{k-1}) &= \int p(y_k | x_k) p(x_k | y^{k-1}) dx_k \\ &= \int N(y_k; Hx_k, R_k) N(x_k; \hat{x}_{k|k-1}, P_{k|k-1}) dx_k \\ &= N(y_k; \hat{y}_{k|k-1}, S_k) \end{aligned}$$

其中, $\hat{y}_{k|k-1} = H \hat{x}_{k|k-1}$, $S_k = H P_{k|k-1} H^T + R_k$ 。

通过上述运算得到目标观测预测密度的均值和方差,其伪函数为

$$[\hat{y}_{k|k-1}, S_k] = MP[\hat{x}_{k|k-1}, P_{k|k-1}, H, R]$$

观测预测定义为

$$\begin{aligned} \hat{y}_{k|k-1} &= H \hat{x}_{k|k-1} \\ S_k &= H P_{k|k-1} H^T + R \end{aligned}$$

4. 条件密度函数

将预测函数、似然函数和归一化参数代入贝叶斯递推公式(2.3)可以得到后验概率密度 $p(x_k | y^k)$ 为

$$p(x_k | y^k) = \frac{N(y_k; Hx_k, R_k) N(x_k; \hat{x}_{k|k-1}, P_{k|k-1})}{N(y_k; \hat{y}_{k|k-1}, S_k)}$$

再次利用定理 2.1,后验概率密度可以表示为

$$p(x_k | y^k) = N(x_k; \hat{x}_{k|k}, P_{k|k}) \quad (2.14)$$

其中

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_{k|k} &= \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}^T \mathbf{S}_k^{-1} (\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1}) \\ \mathbf{P}_{k|k} &= \mathbf{P}_{k|k-1} - \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}^T \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{H} \mathbf{P}_{k|k-1}\end{aligned}$$

因此,给定高斯的预测概率密度和线性高斯的观测方程,得到的后验概率密度也是高斯的。在贝叶斯框架下,高斯预测概率密度与高斯似然函数共轭。

后验概率密度的计算是用观测 \mathbf{y} 更新先验概率密度的过程,先验概率密度用均值 $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$ 和方差 $\mathbf{P}_{k|k-1}$ 描述,观测矩阵 \mathbf{H} 和协方差矩阵 \mathbf{R}_k 作为计算参数,输出为后验概率密度的均值 $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$ 和方差 $\mathbf{P}_{k|k}$ 。卡尔曼滤波估计的伪函数为

$$[\hat{\mathbf{x}}_{k|k}, \mathbf{P}_{k|k}] = \text{KF}_E[\mathbf{y}, \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{P}_{k|k-1}, \mathbf{H}, \mathbf{R}]$$

卡尔曼滤波估计由以下定义:

$$[\hat{\mathbf{y}}_{k|k-1}, \mathbf{S}_k] = \text{MP}[\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{P}_{k|k-1}, \mathbf{H}, \mathbf{R}]$$

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}^T \mathbf{S}_k^{-1}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1})$$

$$\mathbf{P}_{k|k} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}) \mathbf{P}_{k|k-1}$$

式中: \mathbf{I} 为单位矩阵。

2.2.2 卡尔曼滤波方程

在动态方程和观测方程为线性、高斯特性的假定下,最优贝叶斯递推的一个重要特征是: $k-1$ 时刻以高斯分布的后验概率密度在 k 时刻将得到一个高斯分布的后验概率密度。这意味着假若在初始时刻先验概率密度为高斯分布且任意 k 时刻动态方程和观测方程为线性或高斯的,那么 k 时刻的后验概率密度函数可以用一个均值和方差准确描述。这种递推计算后验均值和方差的过程称为卡尔曼滤波。递推过程用算法 1 表示。

算法 1 卡尔曼滤波方程

(1) 计算预测均值和方差矩阵

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \mathbf{F} \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}$$

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \mathbf{F} \mathbf{P}_{k-1|k-1} \mathbf{F}^T + \mathbf{Q}_k$$

(2) 计算观测预测、新息方差矩阵和卡尔曼滤波增益

$$\hat{\mathbf{y}}_{k|k-1} = \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$$

$$\mathbf{S}_k = \mathbf{H} \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}^T + \mathbf{R}$$

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}^T \mathbf{S}_k^{-1}$$

(3) 计算后验均值和方差矩阵

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_{k|k} &= \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k(\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1}) \\ \mathbf{P}_{k|k} &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k\mathbf{H})\mathbf{P}_{k|k-1}\end{aligned}$$

2.3 扩展卡尔曼滤波

若假设条件(A1)~(A3)中任何一个不成立,除特殊情况外(Daum, 1986^[52])将得不到后验概率密度的精确解;目标跟踪问题意味着对精确贝叶斯递推进行近似求解。

在目标跟踪问题当中,假定过程噪声和观测噪声为高斯分布是合理的。认为后验分布是近似高斯的在计算中带来很大方便,因为可以仅用均值和方差这两个参数即可完全界定高斯分布,而通常情况这一假设是惊人地准确的。但是动态方程和观测方程往往不一定是线性的,很多研究学者已经在非线性动态方程或观测方程条件下的目标跟踪算法问题上倾注了大量心血。这些跟踪算法中最著名的是扩展卡尔曼滤波。本节将基于(A2)和(A3)假设条件推导扩展卡尔曼滤波算法,将其作为贝叶斯滤波递推的近似递推形式。

例 2.2 机器人导航。Roumeliotis 和 Bekey(1977^[146]) 在机器人导航问题上比较了扩展卡尔曼滤波和航位推算系统的性能。航位推算是一种机器人或自主交通工具的定位技术。在火星探测领域,NASD 利用机器人进行科学研究、导航,在自主模式下完成相关任务。机器人需要准确定位其位置和方位,机器人通过其传感器提供相关观测信息。Roumeliotis 和 Bekey(1977^[146]) 假设机器人在平面上运动且速度和转向角恒定。运动模型建立在三轮运动平面上,其中后轮实现角度旋转(图 2.1)。

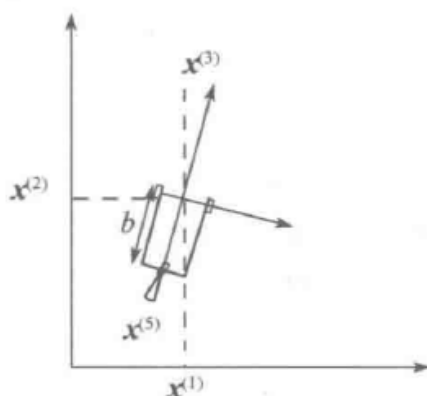


图 2.1 机器人平面模型

目标(机器人)状态可以表示为

$$\mathbf{x}_k = [x_k \quad y_k \quad \theta_k \quad s_k \quad \phi_k]^T$$

式中: (x_k, y_k) 为全局坐标系下的机器人位置; θ_k 为方位; s_k 为运动速度; ϕ_k 为旋转角。假定机器人运动速度和方位扰动较小,对于 $k = 1, 2, \dots$, 目标运动模型可以表

示为

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{v}_k \quad (2.15)$$

其中

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}) = \begin{bmatrix} x_{k-1} - T_{s_{k-1}} \sin(\theta_{k-1} + \phi_{k-1}) \\ y_{k-1} + T_{s_{k-1}} \cos(\theta_{k-1} + \phi_{k-1}) \\ \theta_{k-1} - T_{s_{k-1}} \tan(\phi_{k-1})/b \\ s_{k-1} \\ \phi_{k-1} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

式中: $T = t_k - t_{k-1}$ 为观测之间的时间间隔, 假定 T 恒为常数; b 为轮间间隔。

观测数据由太阳能传感器测得, 太阳能传感器通过太阳位置确定航天器的绝对方位, 安装在前轮的两个译码器测量每个车轮的速度, 安装在后轮的电位计测量旋转角。观测方程可以表示为

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{H}\mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k$$

式中: \mathbf{w}_k 为观测误差; \mathbf{H} 为

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.3.1 线性滤波近似

1. 目标动态方程线性近似

若动态方程式(2.5)的函数 \mathbf{f} 是非线性的, 即使过程噪声 \mathbf{v}_k 是高斯分布的, Chapman - Kolmogorov 方程下的预测概率密度函数推导将变得复杂。将 $\mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1})$ 在 $\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}$ 处用泰勒展开可以得到其近似形式

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}) \approx \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\bigotimes_{i=1}^m \nabla_{\mathbf{x}^T} \right) \mathbf{f}(\mathbf{x}) \big|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}} \left(\bigotimes_{i=1}^m (\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}) \right)$$

其中, 向量 $\mathbf{b} = [b_1, \dots, b_q]^T$, $\nabla_{\mathbf{b}} = [\partial/\partial b_1, \dots, \partial/\partial b_q]^T$, \otimes 表示克罗内克乘积。假定 $\mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1})$ 可以由其零阶和一阶泰勒展开精确表示, 则可以得到扩展卡尔曼滤波, 即

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}) \approx \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_{k-1}) = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}) + \mathbf{F}_k (\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}) \quad (2.17)$$

其中

$$\mathbf{F}_k = \nabla_{\mathbf{x}^T} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \big|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}}$$

2. 观测方程线性近似

观测方程式(2.7)中函数 h 的非线性特性为归一化因数和后验概率密度的计算增加了困难。同样,通过一阶泰勒近似可以求得函数 h 的近似表达式。 $h(x_k)$ 在 $\hat{x}_{k|k-1}$ 处的泰勒展开可以表示为

$$h(x_k) = h(\hat{x}_{k|k-1}) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\bigotimes_{i=1}^m \nabla_{x^T} \right) h(x) \Big|_{x=\hat{x}_{k|k-1}} \left(\bigotimes_{i=1}^m (x_k - \hat{x}_{k|k-1}) \right)$$

$h(x_k)$ 的一阶泰勒近似为

$$h(x_k) \approx \hat{h}(x_k) = h(\hat{x}_{k|k-1}) + H_k(x_k - \hat{x}_{k|k-1}) \quad (2.18)$$

其中

$$H_k = \nabla_{x^T} h(x) \Big|_{x=\hat{x}_{k|k-1}}$$

将 \hat{f} 和 \hat{h} 替代 f 和 h , 扩展卡尔曼滤波的推导类似于卡尔曼滤波。下面将介绍扩展卡尔曼滤波的推导过程。

3. 转移和预测概率密度

通过式(2.17)的线性化近似,转移密度函数可以表示为

$$\begin{aligned} p(x_k | x_{k-1}) &= p_{v_k}(x_k - f(x_{k-1})) \\ &\approx p_{v_k}(x_k - \hat{f}(x_{k-1})) \\ &= p_{v_k}(x_k - F_k x_{k-1} - \varepsilon_f(\hat{x}_{k-1|k-1})) \end{aligned} \quad (2.19)$$

其中, $\varepsilon_f(x) = f(x) - F_k x$ 。由条件(A1)假定,过程噪声是高斯分布的,转移概率密度可以线性近似为

$$p(x_k | x_{k-1}) = N(x_k; F_k x_{k-1} + \varepsilon_f(\hat{x}_{k-1|k-1}), Q_k) \quad (2.20)$$

假定条件(A3)成立,在 $k-1$ 时刻目标状态的后验概率密度可以表示为

$$p(x_{k-1} | y^{k-1}) = N(x_{k-1}; \hat{x}_{k-1|k-1}, P_{k-1|k-1}) \quad (2.21)$$

将式(2.20)和式(2.21)代入 Chpman - Kolmogotov 方程式(2.4)并结合定理 2.1 可得

$$\begin{aligned} p(x_k | y^{k-1}) &= \int N(x_k; F_k x_{k-1} + \varepsilon_f(\hat{x}_{k-1|k-1}), Q_k) N(x_{k-1}; \hat{x}_{k-1|k-1}, P_{k-1|k-1}) dx_{k-1} \\ &= N(x_k; \hat{x}_{k|k-1}, P_{k|k-1}) \end{aligned} \quad (2.22)$$

其中

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k|k-1} &= F_k \hat{x}_{k-1|k-1} + \varepsilon_f(\hat{x}_{k-1|k-1}) \\ &= F_k \hat{x}_{k-1|k-1} + f(\hat{x}_{k-1|k-1}) - F_k \hat{x}_{k-1|k-1} \\ &= f(\hat{x}_{k-1|k-1}) \end{aligned}$$

$$P_{k|k-1} = F_k P_{k-1|k-1} F_k^T + Q_k$$

4. 似然函数和归一化因数

将式(2.18)线性化近似,可以推导出似然函数

$$\begin{aligned} p(y_k | x_k) &= p_{w_k}(y_k - h(x_k)) \\ &= p_{w_k}(y_k - h(\hat{x}_{k|k-1}) - H_k(x_k - \hat{x}_{k|k-1})) \\ &= p_{w_k}(y_k - H_k x_k - \varepsilon_h(\hat{x}_{k|k-1})) \end{aligned} \quad (2.23)$$

其中, $\varepsilon_h(x) = h(x) - H_k x$ 。假定条件(A2)成立,观测噪声是均值为零、方差为 R_k 的高斯噪声,则线性化似然函数为

$$p(y_k | x_k) = N(y_k; H_k x_k + \varepsilon_h(\hat{x}_{k|k-1}), R_k) \quad (2.24)$$

根据预测概率密度式(2.22)、线性化似然函数式(2.24)和定理2.1,归一化因数可以表示为

$$\begin{aligned} p(y^k | y^{k-1}) &= \int N(y_k; H_k x_k + \varepsilon_h(\hat{x}_{k|k-1}), R_k) N(x_k; \hat{x}_{k|k-1}, P_{k|k-1}) dx_k \\ &= N(y_k; \hat{y}_{k|k-1}, S_k) \end{aligned} \quad (2.25)$$

其中

$$\begin{aligned} \hat{y}_{k|k-1} &= H_k \hat{x}_{k|k-1} + \varepsilon_h(\hat{x}_{k|k-1}) \\ &= H_k \hat{x}_{k|k-1} + h(\hat{x}_{k|k-1}) - H_k \hat{x}_{k|k-1} \\ &= h(\hat{x}_{k|k-1}) \\ S_k &= H_k P_{k|k-1} H_k^T + R_k \end{aligned}$$

5. 条件密度函数

将预测概率密度式(2.22)、线性似然函数式(2.24)和归一化因数式(2.25)代入贝叶斯公式(2.3),利用定理2.1可得到高斯形式下的条件概率密度:

$$p(x_k | y^k) = N(x_k; \hat{x}_{k|k}, P_{k|k})$$

其中

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k|k} &= \hat{x}_{k|k-1} + P_{k|k-1} H_k^T S_k^{-1} (y_k - \hat{y}_{k|k-1}) \\ P_{k|k} &= P_{k|k-1} - P_{k|k-1} H_k^T S_k^{-1} H_k P_{k|k-1} \end{aligned}$$

2.3.2 扩展卡尔曼滤波方程

算法2中总结了扩展卡尔曼滤波方程。

通过算法1和算法2的比较表明,扩展卡尔曼滤波与卡尔曼滤波具有相同的结构。两种算法都是以高斯形式描述后验概率密度的,均值和方差都是通过预测和利用最新观测更新步骤递推计算得到。最大的不同之处在于,扩展卡尔曼滤波的后验协方差矩阵依赖于数据,这是由非线性动态方程/观测方程导致的,需要通过依赖于观测的状态估计值计算雅克比矩阵 F_k 和 H_k 。

算法2 扩展卡尔曼滤波

(1) 计算 f 在 $\hat{x}_{k-1|k-1}$ 处的雅克比矩阵

$$F_k = \nabla_x f(x) \big|_{x=\hat{x}_{k-1|k-1}}$$

(2) 计算预测均值和方差

$$\begin{aligned}\hat{x}_{k|k-1} &= f(\hat{x}_{k-1|k-1}) \\ P_{k|k-1} &= F_k P_{k-1|k-1} F_k^T + Q_k\end{aligned}$$

(3) 计算 h 在 $\hat{x}_{k|k-1}$ 处的雅克比矩阵

$$H_k = \nabla_x h(x) \big|_{x=\hat{x}_{k|k-1}}$$

(4) 计算观测预测,新息协方差矩阵和卡尔曼滤波增益

$$\begin{aligned}\hat{y}_{k|k-1} &= h(\hat{x}_{k|k-1}) \\ S_k &= H_k P_{k|k-1} H_k^T + R_k \\ K_k &= P_{k|k-1} H_k^T S_k^{-1}\end{aligned}$$

(5) 计算后验均值和协方差矩阵

$$\begin{aligned}\hat{x}_{k|k} &= \hat{x}_{k|k-1} + K_k (y_k - \hat{y}_{k|k-1}) \\ P_{k|k} &= (I - K_k H) P_{k|k-1}\end{aligned}$$

扩展卡尔曼滤波是一个简单而直观的非线性近似滤波算法,在实际应用中具有良好的运算性能。但是,扩展卡尔曼滤波有很多不足之处:

(1) 当近似后验均值与真值相差较大时,易造成滤波发散。造成滤波发散的主要原因是后验协方差矩阵的乐观主义近似。

(2) 在大多数情况下,雅克比矩阵很难计算,给扩展卡尔曼滤波在实际应用中的实现带来了困难。

2.4 不敏卡尔曼滤波

不敏卡尔曼滤波(UKF)是扩展卡尔曼滤波(EKF)的一种替代算法,具有扩展卡尔曼滤波计算简单的特性,同时避免了计算雅克比矩阵且在大多数情况下具有更高的计算精度。不敏卡尔曼滤波的理论基础是不敏变换(UT变换),不敏变换是一种计算非线性变换随机变量各阶矩的近似方法。本节首先介绍不敏变换,然后解释其如何在不敏卡尔曼滤波中应用。

2.4.1 不敏变换

考虑一个随机变量 $x \in \mathbb{R}^n$ 和非线性变换 $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 。在很多应用中会遇到这样一个问题,即如何计算随机变量 $z = g(x)$ 的矩。例如 z 的均值可以表示为

$$E(z) = \int g(x) p(x) dx \quad (2.26)$$

大多数情况下积分式(2.6)不能够直接计算。而 UT 变换是针对上述积分的近似数值计算方法, UT 变换利用定义域上非均匀空间点的函数值进行加权求和。这种方法类似于高斯求积公式近似求解一维积分的方法。要计算函数 g 值的点为 sigma 点。假定 χ^1, \dots, χ^s 表示 s 个 sigma 点集, w^1, \dots, w^s 表示相应的权值。对这些加权 sigma 点的基本要求是样本均值和方差收敛于真正的均值和方差, 即

$$\frac{1}{s} \sum_{i=1}^s w^i \chi^i = E(\mathbf{x}) \quad (2.27)$$

$$\frac{1}{s} \sum_{i=1}^s w^i [\chi^i - E(\mathbf{x})][\chi^i - E(\mathbf{x})]^T = \text{cov}(\mathbf{x}) \quad (2.28)$$

令 $\mathcal{Z}^i = g(\chi^i)$, $i = 1, \dots, s$ 表示在第 i 个 sigma 点处的函数值。 z 均值的 UT 近似可以表示为

$$\widehat{E(z)} = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s w^i \mathcal{Z}^i \quad (2.29)$$

可以发现, 均值的 UT 近似计算类似于基于随机采样的均值计算。例如, 通过重要性函数 q 的采样 $\mathbf{x}^i \sim q$, 均值可以近似为

$$\frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \frac{p(\mathbf{x}^i)}{q(\mathbf{x}^i)} g(\mathbf{x}^i) / \sum_{j=1}^s \frac{p(\mathbf{x}^j)}{q(\mathbf{x}^j)} \quad (2.30)$$

重要性采样与 UT 变换的不同之处在于, UT 变换当中的 sigma 点是通过确定规则得到的, 这一特点使得它们满足式(2.27)和式(2.28)的要求。这意味着仅仅通过有限几个 sigma 点就可以得到很高的精度。通常, $\widehat{E(z)}$ 可以达到泰勒展开的二阶精度。

利用相似的方法可以得到 z 的其他阶矩。在非线性滤波中, 特别重要的是 z 的协方差矩阵以及 z 和 \mathbf{x} 的互协方差, 通过 UT 近似计算可以得到

$$\widehat{\text{cov}(z)} = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s w^i [\mathcal{Z}^i - \widehat{E(z)}][\mathcal{Z}^i - \widehat{E(z)}]^T \quad (2.31)$$

$$\widehat{\text{cov}(\mathbf{x}, z)} = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s w^i [\chi^i - E(\mathbf{x})][\mathcal{Z}^i - \widehat{E(z)}]^T \quad (2.32)$$

$\widehat{\text{cov}(z)}$ 与 $\widehat{\text{cov}(\mathbf{x}, z)}$ 的近似计算同样精确到二阶。

很多选取 sigma 点的方法可以满足式(2.27)和式(2.28)的要求。Julier 等 (2000^[78]) 首先提出依据以下方法选择 $s = 2n + 1$ 个 sigma 点。定义 $(n + \kappa)\Sigma$ 的平方根矩阵 A , 其中 κ 是一个已知的确定性参数, 那么 $AA^T = (n + \kappa)\Sigma$ 。给定 $i = 1, \dots, 2n + 1$, sigma 点通过以下方法得到

$$\chi^i = \mu + \sigma^i \quad (2.33)$$

其中, $\sigma^1 = \mathbf{0}_{n,1}$, 且

$$[\sigma^2 \dots \sigma^{n+1}] = A \quad (2.34)$$

其中, $\sigma^{n+i+1} = -\sigma^{i+1}, i=1, \dots, n$ 。对应的权值为

$$w^i = \begin{cases} \kappa/(n + \kappa) & i = 1 \\ 0.5/(n + \kappa) & i = 2, \dots, 2n + 1 \end{cases} \quad (2.35)$$

可以证明,按照式(2.27)和式(2.28)得到的 sigma 样本一、二阶矩与 \mathbf{x} 的矩匹配。样本均值和样本协方差矩阵分别为

$$\boldsymbol{\mu} + [\sigma^1 \cdots \sigma^{2n+1}] \begin{bmatrix} w^1 \\ \vdots \\ w^{2n+1} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\mu} + 0.5(\mathbf{A} - \mathbf{A})/(n + \kappa) = \boldsymbol{\mu} \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned} & [\sigma^1 \cdots \sigma^{2n+1}] \begin{bmatrix} w^1 & & \\ & \ddots & \\ & & w^{2n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma^{1'} \\ \vdots \\ \sigma^{2n+1'} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{(n + \kappa)} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n,1} & \mathbf{A} & \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa & & \\ & 0.5 & \\ & & \ddots \\ & & & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n,1} \\ \mathbf{A}^T \\ \mathbf{A}^T \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2(n + \kappa)} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n,1} & \mathbf{A} & \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n,1} \\ \mathbf{A}^T \\ \mathbf{A}^T \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{A}\mathbf{A}^T/(n + \kappa) = \boldsymbol{\Sigma} \end{aligned} \quad (2.37)$$

参数 κ 决定了 sigma 点的范围。通常要求 sigma 的取值在均值 $\boldsymbol{\mu}$ 附近,从而在对函数 $g(\mathbf{x})$ 的矩近似时仅仅感兴趣的参数空间范围内的函数值被考虑进来。Sigma 点分布范围较小时, $(n + \kappa)$ 取值较小。当取 sigma 点分布范围较大时,可以通过选 κ 为负数来实现。当 $\kappa < 0$ 时,由于 $(n + \kappa) > 0$,则第一个权值 $w^1 = \kappa/(n + \kappa)$ 为负数,不能再保证协方差矩阵 $\text{cov}(\mathbf{z})$ 的正定性。这一问题促使了尺度 UT 的提出,它允许 sigma 点分布相对集中但不会导致协方差矩阵为负。其他 sigma 点选取方法选用不同点数的 sigma 点集。一种简化的 sigma 点选取方法仅仅选用 $s = n + 2!$ 个 sigma 点,减小了计算量 (Lerner, 2002^[84])。这些 sigma 点选取方法的共同特性为:随着非线性变换中变量维数 n 的增大,需要的 sigma 点数增加。

2.4.2 不敏卡尔曼滤波算法

UT 算法可以作为近似非线性滤波近似的基础,与 EKF 具有相同的形式,但推导过程完全不同。我们仍假定(A2)和(A3)成立。

通过贝叶斯准则, \mathbf{x}_k 的后验概率密度可以表示为

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}^k) = p(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k | \mathbf{y}^{k-1})/p(\mathbf{y}_k | \mathbf{y}^{k-1}) \quad (2.38)$$

通过 UT 变换, 给定观测序列 y^{k-1} 条件下, 状态 x_k 和观测 y_k 的联合条件概率密度由一高斯密度近似

$$p(x_k, y_k | y^{k-1}) = N\left(\begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \hat{x}_{k|k-1} \\ \hat{y}_{k|k-1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} P_{k|k-1} & \Psi_k \\ \Psi_k^T & S_k \end{bmatrix}\right) \quad (2.39)$$

它表明

$$p(x_k, y_k | y^{k-1}) = N(y_k; \hat{y}_{k|k-1}, S_k) \quad (2.40)$$

一般情况下, 式(2.39)和式(2.30)中的矩不能直接精确计算, 只能近似求解。UT 算法即用来完成这一任务。

1. 预测状态统计特性

x_k 的预测均值和协方差等于以下变换的矩:

$$x_k = f(x_{k-1}) + v_k \quad (2.41)$$

给定 y^{k-1} , x_{k-1} 的统计特性可由(A3)得到。预测均值和协方差矩阵可以表示为

$$E(x_k | y^{k-1}) = E(f(x_{k-1}) + v_k | y^{k-1}) = E(f(x_{k-1}) | y^{k-1}) \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} \text{cov}(x_k | y^{k-1}) &= \text{cov}(f(x_{k-1}) + v_k | y^{k-1}) \\ &= \text{cov}(f(x_{k-1}) | y^{k-1}) + \text{cov}(v_k) \end{aligned} \quad (2.43)$$

通过 UT 变换可以近似计算预测均值和协方差矩阵。正如 2.4.1 节所述, 选择 sigma 点集 $\chi_{k-1}^1, \dots, \chi_{k-1}^s$ 和权值 w^1, \dots, w^s 匹配 $p(x_{k-1}, y_k | y^{k-1})$ 的均值和协方差。通过 $\chi_k^i = f(\chi_{k-1}^i)$, $i=1, \dots, s$, UT 近似求得预测均值和协方差为

$$\hat{x}_{k|k-1} = \sum_{i=1}^s w^i \chi_k^i \quad (2.44)$$

$$P_{k|k-1} = Q_k + \sum_{i=1}^s w^i (\chi_k^i - \hat{x}_{k|k-1})(\chi_k^i - \hat{x}_{k|k-1})^T \quad (2.45)$$

2. 预测观测统计特性

观测 y_k 的预测统计特性等于以下变换的矩:

$$y_k = h(x_k) + w_k \quad (2.46)$$

给定 y^{k-1} 情况下, x_k 的统计特性可通过一步预测得到, 因此有

$$E(y_k | y^{k-1}) = E(h(x_k) | y^{k-1}) \quad (2.47)$$

$$\text{cov}(y_k | y^{k-1}) = \text{cov}(h(x_k) | y^{k-1}) + \text{cov}(w_k) \quad (2.48)$$

$$\text{cov}(x_k, y_k | y^{k-1}) = \text{cov}(x_k, h(x_k) | y^{k-1}) \quad (2.49)$$

令 $\chi_k^1, \dots, \chi_k^s$ 和 w^1, \dots, w^s 分别表示 sigma 点集和相应的权值, 用它们来匹配预测均值和协方差矩阵。转换 sigma 点为 $\nu_k^i = h(\chi_k^i)$, $i=1, \dots, s$ 。矩式(2.47) ~ 式(2.49)的 UT 近似为

$$\hat{y}_{k|k-1} = \sum_{i=1}^s w^i \nu_k^i \quad (2.50)$$

$$S_k = R_k + \sum_{i=1}^s w^i (\nu_k^i - \hat{y}_{k|k-1}) (\nu_k^i - \hat{y}_{k|k-1})^T \quad (2.51)$$

$$\Psi_k = \sum_{i=1}^s w^i (\chi_k^i - \hat{x}_{k|k-1}) (\nu_k^i - \hat{y}_{k|k-1})^T \quad (2.52)$$

在高斯假设条件下,矩近似式(2.44)、式(2.45)和式(2.50)~式(2.52)给出了预测状态和观测联合分布的完整描述,接下来只需要将式(2.39)和式(2.40)代入式(2.38),并重新组织方程即可。其中的必要操作过程为大家所熟知,可参考文献(Anderson 和 Moore, 1979^[3])例 3.2 中的推导,这里给出后验概率密度函数的推导结果

$$p(x_k | y^k) = N(x_k; \hat{x}_k, P_{k|k}) \quad (2.53)$$

其中

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{k|k-1} + \Psi_k S_k^{-1} (y_k - \hat{y}_{k|k-1}) \quad (2.54)$$

$$P_{k|k} = P_{k|k-1} - \Psi_k S_k^{-1} \Psi_k^T \quad (2.55)$$

算法 3 对不敏卡尔曼滤波进行了总结。与扩展卡尔曼滤波一样,不敏卡尔曼滤波与卡尔曼滤波的主要区别仅仅在于:不敏卡尔曼滤波的后验协方差矩阵依赖于观测。在不敏卡尔曼滤波中这是由于计算矩近似的 sigma 点集由依赖于观测的状态估计得到。不敏卡尔曼滤波与扩展卡尔曼滤波有相同的运算复杂度,但通常情况下算法性能要好得多,这得益于 UKF 中对统计矩更高的近似精度。实际上 UKF 可达到二阶 EKF 相同的精度,后者需要计算雅克比矩阵和海森矩阵。

算法 3 不敏卡尔曼滤波

(1) 确定 sigma 点 $\chi_{k-1}^1, \dots, \chi_{k-1}^s$ 和权值 w^1, \dots, w^s 。

(2) 计算 sigma 点的转换 $\chi_k^i = f(\chi_{k-1}^i), i = 1, \dots, s$ 。

(3) 计算状态预测统计量

$$\hat{x}_{k|k-1} = \sum_{i=1}^s w^i \chi_k^i$$

$$P_{k|k-1} = Q_k + \sum_{i=1}^s w^i (\chi_k^i - \hat{x}_{k|k-1}) (\chi_k^i - \hat{x}_{k|k-1})^T$$

(4) 确定均值 $\hat{x}_{k|k-1}$ 和方差 $P_{k|k-1}$ 的 sigma 点 $\chi_k^1, \dots, \chi_k^s$ 和权值 w^1, \dots, w^s 。

(5) 计算 sigma 点的转换 $\nu_k^i = h(\chi_k^i), i = 1, \dots, s$ 。

(6) 计算观测预测统计量

$$\hat{y}_{k|k-1} = \sum_{i=1}^s w^i \nu_k^i$$

$$S_k = R_k + \sum_{i=1}^s w^i (\nu_k^i - \hat{y}_{k|k-1}) (\nu_k^i - \hat{y}_{k|k-1})^T$$

$$\Psi_k = \sum_{i=1}^s w^i (\chi_k^i - \hat{x}_{k|k-1}) (\nu_k^i - \hat{y}_{k|k-1})^T$$

(7) 计算后验均值和方差矩阵

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_k &= \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \boldsymbol{\Psi}_k \mathbf{S}_k^{-1} (\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1}) \\ \mathbf{P}_{k|k} &= \mathbf{P}_{k|k-1} - \boldsymbol{\Psi}_k \mathbf{S}_k^{-1} \boldsymbol{\Psi}_k^T\end{aligned}$$

结束之前需要注意的是,上述推导中假定动态方程和观测方程中的噪声为加性噪声是为了计算方便,UT 变换同样适用于非加性噪声的情况。例如,如果动态方程表示为 $\mathbf{x}_k = \mathbf{g}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{v}_k)$, 那么非线性变换条件下扩展变量 $\mathbf{z}_k = [\mathbf{x}_{k-1}^T, \mathbf{v}_k^T]^T$, 其统计变量为 $E(\mathbf{z}_k | \mathbf{y}^{k-1}) = [\mathbf{x}_{k|k-1}^T, \mathbf{0}_{n_v}^T]^T$ 和 $\text{cov}(\mathbf{z}_k | \mathbf{y}^{k-1}) = \text{diag}(\mathbf{P}_{k-1|k-1}, \mathbf{Q}_k)$ 。通过 UT 可以由函数 \mathbf{g} 转换近似得到随机变量 \mathbf{z}_k 。由于 \mathbf{z}_k 的维数为 $n_x + n_v$, 相比动态噪声为加性噪声的情况,这将需要更多的 sigma 点。对于观测噪声为非加性噪声的情况,结论也是一样成立的。

2.5 点群滤波

当精确贝叶斯方法不再适用的情况下,扩展卡尔曼滤波和不敏卡尔曼滤波为后验概率密度的近似提供了必要的闭式解。这种意义下,扩展卡尔曼滤波和不敏卡尔曼滤波可以作为最优贝叶斯滤波的解析近似解。虽然扩展卡尔曼滤波和不敏卡尔曼滤波计算效率高,但是它们的计算精度受近似有效性的限制。若有足够的计算资源,通过对后验概率密度进行数值近似可以提高计算精度。其中一种近似方法便是点群滤波,它对后验概率密度进行离散近似。在点群滤波当中,不需要(A1)~(A3)的假设条件。

在 $k-1$ 时刻,一个状态空间被分割成 n 个等效超立方体。当 $i=1, \dots, n$ 时,令 \mathbf{x}_{k-1}^i 表示第 i 个超立方空间的中心。每个超立方空间分配一个权值 $w_{k-1|k-1}^i, i=1, \dots, n$, 且满足 $\sum_{i=1}^n w_{k-1|k-1}^i = 1$ 。 $k-1$ 时刻,超立方空间和对应的权值构成了后验概率密度的离散近似:

$$p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{y}^{k-1}) \approx \sum_{i=1}^n w_{k-1|k-1}^i \delta(\mathbf{x}_{k-1} - \mathbf{x}_{k-1}^i) \quad (2.56)$$

粗略地讲, $w_{k-1|k-1}^i \approx p(\mathbf{x}_{k-1}^i | \mathbf{y}^{k-1})$ 。 k 时刻后验概率密度可以利用相似的方法求得。

2.5.1 转移和预测密度

假定目标动态方程的噪声为加性噪声,则

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{v}_k \quad (2.57)$$

转移概率密度为 $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) = p_{\mathbf{v}_k}(\mathbf{x}_k - \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}))$ 。将转移概率密度代入 Chapman - Kolmogorov 方程(式(2.4)),可得

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}^{k-1}) = \int p_{v_k}(\mathbf{x}_k - f(\mathbf{x}_{k-1})) p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{y}^{k-1}) d\mathbf{x}_{k-1} \quad (2.58)$$

将点群滤波近似式(2.56)代替 $p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{y}^{k-1})$ 代入式(2.58), 可得到

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}^{k-1}) &\approx \int p_{v_k}(\mathbf{x}_k - f(\mathbf{x}_{k-1})) \sum_{i=1}^n w_{k-1|k-1}^i \delta(\mathbf{x}_{k-1} - \mathbf{x}_{k-1}^i) d\mathbf{x}_{k-1} \\ &= \sum_{i=1}^n w_{k-1|k-1}^i p_{v_k}(\mathbf{x}_k - f(\mathbf{x}_{k-1}^i)) \end{aligned}$$

通过将状态空间分割成 n 个体积相等的超维立方可以实现预测概率密度的有限维表示。这种方法不要求每个时刻样本点个数相同, 不过为了便于描述这里选取了相同样本点数。令 $\mathbf{x}_{k-1}^i, i=1, \dots, n$ 表示第 i 个超立方空间的中心。那么, 后验概率密度的点群近似可以表示为

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}^{k-1}) \approx \sum_{i=1}^n w_{k|k-1}^i \delta(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k^i) \quad (2.59)$$

其中, 对于 $i=1, \dots, n$ 有

$$w_{k|k-1}^i = \sum_{j=1}^n w_{k-1|k-1}^j p_{v_k}(\mathbf{x}_k^i - f(\mathbf{x}_{k-1}^j)) \quad (2.60)$$

2.5.2 似然函数和归一化因数

假定观测噪声为加性噪声

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{w}_k \quad (2.61)$$

\mathbf{x}_k 的似然函数为 $p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k) = p_{w_k}(\mathbf{y}_k - \mathbf{h}(\mathbf{x}_k))$ 。归一化因数表示为

$$p(\mathbf{y}_k | \mathbf{y}^{k-1}) = \int p_{w_k}(\mathbf{y}_k - \mathbf{h}(\mathbf{x}_k)) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}^{k-1}) d\mathbf{x}_k \quad (2.62)$$

将式(2.59)代入式(2.62)可以得到归一化因数的点群滤波近似为

$$\begin{aligned} p(\mathbf{y}_k | \mathbf{y}^{k-1}) &\approx \int p_{w_k}(\mathbf{y}_k - \mathbf{h}(\mathbf{x}_k)) \sum_{i=1}^n w_{k|k-1}^i \delta(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k^i) d\mathbf{x}_k \\ &= \sum_{i=1}^n w_{k|k-1}^i p_{w_k}(\mathbf{y}_k - \mathbf{h}(\mathbf{x}_k^i)) \end{aligned} \quad (2.63)$$

2.5.3 条件概率密度

将式(2.59)、式(2.63)和似然函数代入式(2.9)可得到后验概率密度的点群滤波近似

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}^k) \approx \frac{p_{w_k}(\mathbf{y}_k - \mathbf{h}(\mathbf{x}_k)) \sum_{i=1}^n w_{k|k-1}^i \delta(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k^i)}{\sum_{i=1}^n w_{k|k-1}^i p_{w_k}(\mathbf{y}_k - \mathbf{h}(\mathbf{x}_k^i))}$$

$$= \sum_{i=1}^n w_{k|k}^i \delta(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k^i) \quad (2.64)$$

其中

$$w_{k|k}^i = w_{k|k-1}^i p_{w_k}(\mathbf{y}_k - \mathbf{h}(\mathbf{x}_k^i)) / \sum_{j=1}^n w_{k|k-1}^j p_{w_k}(\mathbf{y}_k - \mathbf{h}(\mathbf{x}_k^j)) \quad (2.65)$$

预测概率密度权值乘以对应状态值的似然函数, 然后进行归一化可求得后验概率密度近似权值, 这是对基于当前观测修正的定量说明。我们可轻松获得状态的点估计为

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \int \mathbf{x}_k p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}^k) d\mathbf{x}_k \approx \sum_{i=1}^n w_{k|k}^i \mathbf{x}_k^i \quad (2.66)$$

2.5.4 点群滤波方程

点群滤波的递推由算法 4 描述, 它由 $k-1$ 时刻的后验概率密度近似式(2.56)开始。在此不作检验的一个重要问题是描述后验概率密度的网格点的选择问题。选取的网格点必须覆盖感兴趣的状态空间, 而不需要考虑的状态空间则不包含在内。难点在于: 在感兴趣的空间不能准确确定的情况下如何实现网格点的选取。解决此问题的一种途径是利用先验信息预测感兴趣的空间(Bucy and Senne, 1997^[34])。在贝叶斯条件下, Challa, 1998^[39]提出了一种通过契比雪夫不等式自适应选取网格点的方法。

算法 4 点群滤波

(1) 选择网格点 $\mathbf{x}_k^1, \dots, \mathbf{x}_k^n$ 。

(2) 计算预测密度的权值

$$w_{k|k-1}^i = \sum_{j=1}^n w_{k-1|k-1}^j p_{v_k}(\mathbf{x}_k^i - \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}^j)), \quad i = 1, \dots, n$$

(3) 计算后验概率密度的权值

$$w_{k|k}^i = \frac{w_{k|k-1}^i p_{w_k}(\mathbf{y}_k - \mathbf{h}(\mathbf{x}_k^i))}{\sum_{j=1}^n w_{k|k-1}^j p_{w_k}(\mathbf{y}_k - \mathbf{h}(\mathbf{x}_k^j)), \quad i = 1, \dots, n$$

(4) 计算状态估计

$$\mathbf{x}_{k|k} = \sum_{i=1}^n w_{k|k}^i \mathbf{x}_k^i$$

点群滤波的主要不足是计算复杂, 两个方面导致了这一问题。首先, 在算法 4 中的第(2)步, 直接计算预测概率密度权值需要 n^2 步计算。利用椭圆波门跟踪方法可以减小计算量(Bucy and Senne, 1971^[34]), 但是计算量仍然达到 $o(n^2)$, 或者利用快速傅里叶变换(Kramer and Sorenson, 1988^[81]), 计算量变为 $o(n \log(n))$ 。

第二个问题是相对近似误差为 $o(n^{-1/n_x})$, 因此, 对于给定的精度, 所需要的网格数目随着状态向量维数的增加呈指数形式递增, 即使状态向量维数不是很大时, 在合理的计算量下进行准确近似也变得不可实现。这一问题通常称为维数灾难。

2.6 粒子滤波

与点群滤波相似, 粒子滤波也是对后验概率密度进行离散近似。不同之处在于粒子滤波中的支撑粒子是随机得到的, 不是确定性的。这一特点具有很多优势, 由于不再需要设计规则确定网格点, 这一算法应用起来更加方便。采样过程自动将采样点移动到感兴趣的区域。因为误差的收敛速度与状态空间维数相互独立, 降低了计算复杂度。

粒子滤波又称为序列重要性采样算法 (SIS)。SIS 包含从重要性密度函数中采样的过程, 将 k 时刻采样得到的粒子添加到直到 $k-1$ 时刻的粒子中得到粒子集 $x_{0:k}$ 。由于当前时刻的采样只与前一时刻的采样有关, 因此不必保留所有时刻的粒子。给定粒子 $x_{k-1}^1, \dots, x_{k-1}^n$ 以及权值 $w_{k-1}^1, \dots, w_{k-1}^n$ 用来描述 $k-1$ 时刻的后验概率密度, 用来描述 k 时刻后验概率密度的粒子和权值则由算法 5 得到。

算法 5 基本粒子滤波

(1) **for** $i = 1, \dots, n$ **do**

(2) 粒子采样 $(x_k^i, t^i) \sim q$ 。

(3) 计算权值更新因子

$$e_k^i = \frac{p(y_k | x_k, y_{1:k-1}) p(x_k | x_{k-1}^i, y_{1:k-1})}{q(x_k^i, t^i)}$$

(4) **end for**

(5) 计算更新权值

$$w_k^i = \frac{w_{k-1}^i e_k^i}{\sum_{j=1}^n w_{k-1}^j e_k^j}$$

在针对特定目标跟踪问题的粒子滤波设计中包括重要性密度函数 q 的选取和推导。必须恰当地选取重要性密度函数 q , 从而采用合理的粒子数实现理想的跟踪性能。本节将考虑单目标跟踪问题中的几种不同形式的重要性密度函数 q 。本节假定观测方程和动态方程的噪声为加性噪声, 即

$$x_k = f(x_{k-1}) + v_k \tag{2.67}$$

$$y_k = h(x_k) + w_k \tag{2.68}$$

2.6.1 单目标粒子滤波跟踪

自举滤波算法 (BF) 的重要性密度函数可以表示为

$$q(\mathbf{x}_k, t) = w_{k-1}^i p_{v_k}(\mathbf{x}_k - \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}^i)) \quad (2.69)$$

算法 6 总结了重要性密度函数式(2.69)的应用。BF 的优点在于应用简单且适用性强。BF 可适用于任何转移密度函数可以采样、似然函数可计算的系统。BF 的不足在于粒子混合序号的采样以及目标状态描述时未考虑当前时刻的观测。仅仅将当前观测用于评估样本质量是不够的,因为这些采样粒子需要对后验概率密度精确近似,尤其是相对于目标运动方程观测精度较高的情况下。

算法 6 单目标跟踪的自举滤波

- (1) **for** $i = 1, \dots, n$ **do**
- (2) 混合指标抽样 t^i , 使 $\Pr(t^i = l) = w_{k-1}^l$ 。
- (3) 抽样 $\mathbf{v}_k^i \sim p_{v_k}$, 计算目标粒子状态 $\mathbf{x}_k^i = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}^{t^i}) + \mathbf{v}_k^i$ 。
- (4) 计算权值更新因子 $e_k^i = p_{w_k}(\mathbf{y}_k - \mathbf{h}(\mathbf{x}_k^i))$ 。
- (5) **end for**
- (6) 计算更新权值

$$w_k^i = \frac{w_{k-1}^i e_k^i}{\sum_{j=1}^n w_{k-1}^j e_k^j}, \quad i = 1, \dots, n$$

- (7) 计算状态估计

$$\mathbf{x}_{klk} = \sum_{i=1}^n w_{klk}^i \mathbf{x}_k^i$$

2.6.2 最优重要性密度粒子滤波 (OID - PF)

单目标跟踪最优重要性密度为

$$q(\mathbf{x}_k, t) = \psi_k^t p_{v_k}(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}^t, \mathbf{y}_{1:k}) \quad (2.70)$$

其中

$$\psi_k^i = w_{k-1}^i p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_{k-1}^i, \mathbf{y}_{1:k-1}) / \sum_{i=1}^n w_{k-1}^i p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_{k-1}^i, \mathbf{y}_{1:k-1}) \quad (2.71)$$

利用贝叶斯准则,目标状态的采样密度函数可以展开为

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{y}_{1:k}) &= \frac{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k, \mathbf{y}_{1:k-1}) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{y}_{1:k-1})}{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{y}_{1:k-1})} \\ &= \frac{p_{w_k}(\mathbf{y}_k - \mathbf{h}(\mathbf{x}_k)) p_{v_k}(\mathbf{x}_k - \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}))}{\int p_{w_k}(\mathbf{y}_k - \mathbf{h}(\boldsymbol{\xi}_k)) p_{v_k}(\boldsymbol{\xi}_k - \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1})) d\boldsymbol{\xi}_k} \end{aligned}$$

一般情况下 OID 没有解析解。假定(A2)成立,过程噪声和观测噪声为高斯白噪声且观测方程为线性方程,即 $\mathbf{h}(\mathbf{x}_k) = \mathbf{H}\mathbf{x}_k$ 。那么,OID 可以表示为

$$q(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_k, \mathbf{x}_{k-1}) = \frac{N(\mathbf{y}_k; \mathbf{H}\mathbf{x}_k, \mathbf{R}_k) N(\mathbf{x}_k; \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}), \mathbf{Q}_k)}{\int N(\mathbf{y}_k; \mathbf{H}\boldsymbol{\xi}_k, \mathbf{R}_k) N(\boldsymbol{\xi}_k; \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}), \mathbf{Q}_k) d\boldsymbol{\xi}_k} \quad (2.72)$$

利用定理 2.1, 有

$$N(\mathbf{y}_k; \mathbf{H}\mathbf{x}_k, \mathbf{R}_k) N(\mathbf{x}_k; \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}), \mathbf{Q}_k) = N(\mathbf{y}_k; \boldsymbol{\gamma}_k, \mathbf{S}_k) N(\mathbf{x}_k; \boldsymbol{\mu}_k, \boldsymbol{\Sigma}_k) \quad (2.73)$$

其中

$$\boldsymbol{\gamma}_k = \mathbf{H}\mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1})$$

$$\mathbf{S}_k = \mathbf{H}\mathbf{Q}_k\mathbf{H}^T + \mathbf{R}_k$$

$$\boldsymbol{\mu}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{K}_k(\mathbf{y}_k - \boldsymbol{\gamma}_k)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_k = \mathbf{Q}_k - \mathbf{K}_k\mathbf{H}\mathbf{Q}_k$$

其中, $\mathbf{K}_k = \mathbf{Q}_k\mathbf{H}^T\mathbf{S}_k^{-1}$ 。将式(2.73)代入式(2.72), 可得

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_k, \mathbf{x}_{k-1}) = N(\mathbf{x}_k; \boldsymbol{\mu}_k, \boldsymbol{\Sigma}_k) \quad (2.74)$$

利用式(2.73)可求得式(2.72)中的归一化因数值为

$$p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_{k-1}) = \int N(\mathbf{y}_k; \mathbf{H}\mathbf{x}_k, \mathbf{R}_k) N(\mathbf{x}_k; \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}), \mathbf{Q}_k) d\mathbf{x}_k = N(\mathbf{y}_k; \boldsymbol{\gamma}_k, \mathbf{S}_k) \quad (2.75)$$

算法 7 给出了单目标跟踪的 OID 粒子滤波递推形式。目标状态的重要性密度与卡尔曼滤波的相同, 都是利用过去时刻的所有信息。当粒子数目固定时, OID 粒子滤波比自举滤波具有更高的精度。这是因为它在采样混合指标和目标状态时, 利用了当前时刻的观测信息。但是, 推导粒子密度的条件: 要求过程噪声和观测噪声为高斯噪声且观测方程是线性的, 对于许多实际目标跟踪问题来说太严格了。基于观测指示的采样原理还可以应用于辅助粒子滤波中。

算法 7 单目标跟踪的最优重要性密度滤波

(1) 计算: $\mathbf{S}_k = \mathbf{H}\mathbf{Q}_k\mathbf{H}^T + \mathbf{R}_k$, $\mathbf{K}_k = \mathbf{Q}_k\mathbf{H}^T\mathbf{S}_k^{-1}$ 和 $\boldsymbol{\Sigma}_k = \mathbf{Q}_k - \mathbf{K}_k\mathbf{H}\mathbf{Q}_k$ 。

(2) for $i = 1, \dots, n$ do

(3) 计算

$$\boldsymbol{\gamma}_k^i = \mathbf{H}\mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}^i)$$

$$\boldsymbol{\mu}_k^i = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}^i) + \mathbf{K}_k(\mathbf{y}_k - \boldsymbol{\gamma}_k^i)$$

(4) 计算权值更新因子 $a_k^i = N(\mathbf{y}_k; \boldsymbol{\gamma}_k^i, \mathbf{S}_k)$ 。

(5) end for

(6) 计算更新权值

$$\psi_k^i = w_{k-1}^i a_k^i / \sum_{i=1}^n w_{k-1}^i a_k^i$$

(7) for $i = 1, \dots, n$ do

- (8) 重采样混合指标 $t^i, \Pr(t^i = l) = \psi_k^l$ 。
- (9) 目标状态重采样 $\mathbf{x}_k^i \sim N(\boldsymbol{\mu}_k^{t^i}, \boldsymbol{\Sigma}_k)$ 。
- (10) **end for**
- (11) 计算权值 $w_k^i = 1/n, i = 1, \dots, n$ 。
- (12) 计算状态估计

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \sum_{i=1}^n w_{k|k}^i \mathbf{x}_k^i$$

2.6.3 单目标跟踪的辅助自举滤波

辅助自举滤波算法的重要性密度函数为

$$q(\mathbf{x}_k, t) = \xi_k^t p_{v_k}(\mathbf{x}_k - \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}^t)) \quad (2.76)$$

式中

$$\xi_k^t = \frac{w_{k-1}^t p_{w_k}(\mathbf{y}_k - \mathbf{h}(\boldsymbol{\mu}_k^t))}{\sum_{s=1}^n w_{k-1}^s p_{w_k}(\mathbf{y}_k - \mathbf{h}(\boldsymbol{\mu}_k^s))} \quad (2.77)$$

其中, $\boldsymbol{\mu}_k^t = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}^t) + \mathbf{v}_k^t, \mathbf{v}_k^t \sim p_{v_k}$ 。算法 8 给出了辅助自举滤波算法的递推形式。辅助自举滤波算法与自举滤波算法一样,都具有广泛的通用性。对于给定的样本数,因为它利用了当前时刻的观测信息,辅助自举滤波算法性能更优。这就为实现适用性和计算精度的折中创造了条件。

算法 8 辅助自举粒子滤波

- (1) **for** $i = 1, \dots, n$ **do**
- (2) 采样 $\tilde{\mathbf{v}}_k^i \sim p_{v_k}$ 且 $\boldsymbol{\mu}_k^i = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}^i) + \tilde{\mathbf{v}}_k^i$ 。
- (3) 计算权值更新因子 $a_k^i = p_{w_k}(\mathbf{y}_k - \mathbf{h}(\boldsymbol{\mu}_k^i))$ 。
- (4) **end for**
- (5) 计算更新权值

$$\xi_k^t = \frac{w_{k-1}^t a_k^t}{\sum_{i=1}^n w_{k-1}^i a_k^i}, \quad t = 1, \dots, n$$

- (6) **for** $i = 1, \dots, n$ **do**
- (7) 重采样 $t^i, \Pr(t^i = l) = \psi_k^l$ 。
- (8) 重采样 $\mathbf{v}_k^i \sim p_{v_k}$, 计算目标状态粒子 $\mathbf{x}_k^i = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}^i) + \mathbf{v}_k^i$ 。
- (9) 计算非归一化权值

$$\tilde{w}_k^i = \frac{p_{w_k}(\mathbf{y}_k - \mathbf{h}(\mathbf{x}_k^i))}{p_{w_k}(\mathbf{y}_k - \mathbf{h}(\boldsymbol{\mu}_k^{t^i}))}$$

(10) end for

(11) 计算归一化权值

$$w_k^i = \frac{\tilde{w}_k^i}{\sum_{j=1}^n \tilde{w}_k^j}$$

(12) 计算目标状态

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \sum_{i=1}^n w_k^i \mathbf{x}_k^i$$

2.6.4 单目标跟踪的扩展卡尔曼辅助粒子滤波

最优粒子滤波的不足之处在于不适用于观测方程为非线性的情况。扩展卡尔曼粒子滤波通过对观测方程线性化近似,适用于观测方程非线性的情况。这里仍然假定过程噪声和观测噪声为高斯噪声。其重要性密度为

$$q(\mathbf{x}_k, t) = \xi_k^t \hat{p}(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}^t, \mathbf{y}_{1:k}) \quad (2.78)$$

式中

$$\xi_k^t = w_{k-1}^t \hat{p}(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_{k-1}^t, \mathbf{y}_{1:k-1}) / \sum_{i=1}^n w_{k-1}^i \hat{p}(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_{k-1}^i, \mathbf{y}_{1:k-1}) \quad (2.79)$$

采样密度和权值更新因数为

$$\hat{p}(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{y}_{1:k}) = \frac{p_{w_k}(\mathbf{y}_k - \mathbf{h}(\mathbf{f})(\mathbf{x}_{k-1}))(\mathbf{f}) - \mathbf{H}(\mathbf{x}_k - \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}))p_{v_k}(\mathbf{x}_k - \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}))}{\hat{p}(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{y}_{1:k-1})} \quad (2.80)$$

$$\hat{p}(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{y}_{1:k-1}) = \int p_{w_k}(\mathbf{y}_k - \mathbf{h}(\mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}))) - \mathbf{H}(\xi_k - \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}))p_{v_k}(\xi_k - \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}))d\xi_k \quad (2.81)$$

其中, $\mathbf{H} = \nabla_{\mathbf{x}^T} \mathbf{h}(\mathbf{x}) |_{\mathbf{x}=\mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1})}$ 。式(2.81)和式(2.80)的推导与最优贝叶斯滤波类似,算法9给出了具体的递推过程。

算法9 单目标跟踪的扩展卡尔曼辅助粒子滤波

(1) for $i = 1, \dots, n$ do

(2) 计算雅克比矩阵 $\mathbf{H}_k^i = \nabla_{\mathbf{x}^T} \mathbf{h}(\mathbf{x}) |_{\mathbf{x}=\mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}^i)}$ 。

(3) 计算

$$\mathbf{x}_{k|k-1}^i = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}^i), \quad \boldsymbol{\gamma}_k^i = \mathbf{h}(\mathbf{x}_{k|k-1}^i)$$

$$\mathbf{S}_k^i = \mathbf{H}_k^i \mathbf{Q}_k (\mathbf{H}_k^i)^T + \mathbf{R}_k, \quad \mathbf{K}_k^i = \mathbf{Q}_k (\mathbf{H}_k^i)^T (\mathbf{S}_k^i)^{-1}$$

$$\boldsymbol{\mu}_k^i = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}^i) + \mathbf{K}_k^i (\mathbf{y}_k - \boldsymbol{\gamma}_k^i), \quad \boldsymbol{\Sigma}_k^i = \mathbf{Q}_k - \mathbf{K}_k^i \mathbf{H}_k^i \mathbf{Q}_k$$

(4) 计算权值更新因子 $a_k^i = N(\mathbf{y}_k; \boldsymbol{\gamma}_k^i, \mathbf{S}_k^i)$ 。

(5) **end for**

(6) 计算更新权值

$$\psi_k^i = w_{k-1}^i a_k^i / \sum_{i=1}^n w_{k-1}^i a_k^i, \quad i = 1, \dots, n$$

(7) **for** $i = 1, \dots, n$ **do**

(8) 重采样 $t^i, \Pr(t^i = l) = \psi_k^l$ 。

(9) 重采样 $\mathbf{x}_k^i \sim N(\boldsymbol{\mu}_k^{t^i}, \boldsymbol{\Sigma}_k^{t^i})$ 。

(10) 计算归一化权值

$$\tilde{w}_k^i = \frac{p_{\mathbf{w}_k}(\mathbf{y}_k - \mathbf{h}(\mathbf{x}_k^i))}{p_{\mathbf{w}_k}(\mathbf{y}_k - \boldsymbol{\gamma}_k^{t^i} - \mathbf{H}_k^{t^i}(\mathbf{x}_k^i - \mathbf{x}_{k|k-1}^{t^i}))}$$

(11) **end for**

(12) 归一化权值

$$w_k^i = \tilde{w}_k^i / \sum_{j=1}^n \tilde{w}_k^j, \quad i = 1, \dots, n$$

(13) 计算目标状态

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \sum_{i=1}^n w_k^i \mathbf{x}_k^i$$

第(10)步中卡尔曼粒子滤波权值的计算值得注意,在采样过程中利用了线性化过程。对每一个预测粒子 $\mathbf{x}_{k|k-1}^i$ 都进行线性化计算量很大,一个更好的方法是线性化预测粒子均值。因为所有的粒子具有相同的更新协方差矩阵、增益矩阵、后验协方差矩阵,这将大大减小运算量。因为观测噪声和过程噪声为高斯噪声的条件导致扩展卡尔曼粒子滤波不具有自举滤波那样广泛的通用性,但它却不要求观测方程为线性方程。

当粒子数 $n \rightarrow \infty$ 时,本节介绍的粒子滤波算法将是最优的。粒子数目的有限性导致这些算法性能不同。

2.7 性能界限

最优粒子滤波的需要严格的限定条件,例如,若观测方程和动态方程是线性的。在实际应用当中这些条件很难满足,因此,需求助于次优近似算法。常常通过与某种意义上的最高性能进行比较是一条分析次优算法性能的有效途径。这些理论上的最优性能称为性能界限,它通常采用均方误差下限,例如克拉美罗下限、Barankin 界、Weiss - Weinstein 界。为了计算方便,这里主要考虑克拉美罗下限。其他界限更稳定且限定条件较少,但是计算困难。

克拉美罗下限为确定参数的无偏估计的方差设定了一条下界。考虑确定性向量参数 $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \dots, \theta_q]^T$ 和与参数 $\boldsymbol{\theta}$ 有关的观测集 $\mathbf{y} = [y_1, \dots, y_n]^T$, 满足

$E(\hat{\theta}(y)) = \theta$ 的估计 $\hat{\theta}(y)$ 的协方差为

$$\text{cov}(\hat{\theta}(y)) \geq J^{-1} \quad (2.82)$$

式中: J 为 Fisher 信息矩阵, 即

$$J = -E[\nabla_{\theta} \nabla_{\theta}^T \ln p(y | \theta)] \quad (2.83)$$

其中, $\nabla_{\theta} = [\partial/\partial\theta_1, \dots, \partial/\partial\theta_q]^T$ 。当式(2.83)中的微分和期望存在时式(2.82)成立。

由于克拉美罗下限适用于确定性参数, 不能直接用于估计随机参数的估计问题。Van Trees(1968^[156])提出了一种适用于随机参数问题的方法, 称为后验克拉美罗下限(PCRB)。后验克拉美罗下限定义如下: 对于随机向量参数 $\theta = [\theta_1, \dots, \theta_q]^T$ 和观测向量 $y = [y_1, \dots, y_n]^T$ 。估计值 $\hat{\theta}(y)$ 的均方误差满足

$$\text{mse}(\hat{\theta}(y)) = E[(\hat{\theta}(y) - \theta)(\hat{\theta}(y) - \theta)^T] \geq J^{-1} \quad (2.84)$$

$$J = -E[\nabla_{\theta} \nabla_{\theta}^T \ln p(y, \theta)] \quad (2.85)$$

需要注意的是, 式(2.85)的期望与观测 y 和参数 θ 都相关。除了要求式(2.85)的期望和微分存在外, 式(2.84)还要满足对于任意给定的 $i = 1, \dots, q$, 有

$$\lim_{\theta_i \rightarrow \infty} b(\theta)p(\theta) = 0, \lim_{\theta_i \rightarrow -\infty} b(\theta)p(\theta) = 0 \quad (2.86)$$

其中, $b(\theta)$ 为条件偏差

$$b(\theta) = \int (\hat{\theta}(y) - \theta)p(y | \theta) dy$$

条件式(2.86)类似于确定性参数条件下克拉美罗下限的无偏条件。

为了在 k 时刻得到滤波问题的界限, 这里考虑包含当前时刻目标状态的向量参数, $\theta = x^k = [x_1^T, \dots, x_k^T]^T$ 和观测集合 $y = y^k = [y_1^T, \dots, y_k^T]^T$ 。需要注意的是, 这里只考虑 x_k 估计的均方误差, 但是在向量参数中包含所有过去时刻的状态是十分必要的。令 $J_k(\theta)$ 满足 $\text{mse}(\hat{\theta}(y^k)) \geq J_k(\theta)^{-1}$, 即 $J_k(\theta)^{-1}$ 为 θ 的最小均方误差估计的下限, 该均方误差是直到 k 观测的函数。通过以上定义, 对于 $\theta = x^k, k = 1, 2, \dots$, 求解 $J_k(x^k)$:

$$J_k(x^k) = \begin{bmatrix} A_k & B_k \\ B_k & C_k \end{bmatrix} \quad (2.87)$$

式中

$$A_k = -E[\nabla_{x^{k-1}} \nabla_{x^{k-1}}^T \ln p(y^k, x^k)]$$

$$B_k = -E[\nabla_{x^{k-1}} \nabla_{x_k}^T \ln p(y^k, x^k)]$$

$$C_k = -E[\nabla_{x_k} \nabla_{x_k}^T \ln p(y^k, x^k)]$$

$J_k(x^k)$ 可以表示为

$$J_k(\mathbf{x}_k) = \mathbf{C}_k - \mathbf{B}_k^T \mathbf{A}_k^{-1} \mathbf{B}_k \quad (2.88)$$

需要注意的是, k 时刻对于一个 n_x 维的状态向量, 直接应用式(2.88)求解滤波界限需要求解一个 $n_x(k-1) \times n_x(k-1)$ 维矩阵的逆。这一步骤将显著增加计算量。一种更好的途径是寻找联合概率密度的特殊形式来递推求解滤波边界。Tichavsky, 1998^[154] 等人提出了针对滤波问题的递推 PCRB 算法, 经证明效果明显。

为了实现递推计算, 联合概率密度展开为

$$\ln p(\mathbf{y}^k, \mathbf{x}^k) = \ln p(\mathbf{x}_0) + \sum_{t=1}^k [\ln p(\mathbf{y}_t | \mathbf{x}_t) + \ln p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1})] \quad (2.89)$$

式(2.89)中的转移概率密度 $p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1})$ 和似然函数 $p(\mathbf{y}_t | \mathbf{x}_t)$ 由状态方程式(2.1)和观测方程式(2.2)决定。由式(2.89)可知, $J_k(\mathbf{x}^k)$ 表示为如下形式:

$$J_k(\mathbf{x}^k) = \begin{bmatrix} J_0(\mathbf{x}_0) + \mathbf{U}_1 & \mathbf{V}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{V}_1^T & \mathbf{W}_1 + \mathbf{U}_2 & \mathbf{V}_2 & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \cdots & \ddots & \mathbf{V}_{k-1}^T & \mathbf{W}_{k-1} + \mathbf{U}_k & \mathbf{V}_k \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{V}_k^T & \mathbf{W}_k \end{bmatrix} \quad (2.90)$$

其中, 对于 $t=1, \dots, k$, 有

$$\mathbf{U}_t = -E[\nabla_{\mathbf{x}_{t-1}} \nabla_{\mathbf{x}_{t-1}}^T \ln p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1})] \quad (2.91)$$

$$\mathbf{V}_t = -E[\nabla_{\mathbf{x}_{t-1}} \nabla_{\mathbf{x}_t}^T \ln p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1})] \quad (2.92)$$

$$\mathbf{W}_t = -E[\nabla_{\mathbf{x}_t} \nabla_{\mathbf{x}_t}^T \ln p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1})] - E[\nabla_{\mathbf{x}_t} \nabla_{\mathbf{x}_t}^T \ln p(\mathbf{y}_t | \mathbf{x}_t)] \quad (2.93)$$

式(2.90)可以写成式(2.87)的形式, 即

$$\mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{k-1} & \mathbf{B}_{k-1} \\ \mathbf{B}_{k-1}^T & \mathbf{C}_{k-1} + \mathbf{U}_k \end{bmatrix} \quad (2.94)$$

$$\mathbf{B}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{V}_k \end{bmatrix} \quad (2.95)$$

$$\mathbf{C}_k = \mathbf{W}_k \quad (2.96)$$

将式(2.94) ~ 式(2.96)代入式(2.88)可得

$$J_k(\mathbf{x}_k) = \mathbf{W}_k - \mathbf{V}_k^T (\mathbf{C}_{k-1} + \mathbf{U}_k - \mathbf{B}_{k-1}^T \mathbf{A}_{k-1}^{-1} \mathbf{B}_{k-1})^{-1} \mathbf{V}_k$$

由于 $J_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1}) = \mathbf{C}_{k-1} - \mathbf{B}_{k-1}^T \mathbf{A}_{k-1}^{-1} \mathbf{B}_{k-1}$, 对于 $k=1, 2, \dots$, 递推方程可以表示为

$$J_k(\mathbf{x}_k) = \mathbf{W}_k - \mathbf{V}_k^T (J_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{U}_k)^{-1} \mathbf{V}_k \quad (2.97)$$

在每一时刻求解 PCRB 意味着求解方程式(2.91) ~ 式(2.93)并将其代入式(2.97)。这一过程将在下面的例子中说明。

例 2.3 高斯线性系统的后验克拉美罗下限。

假定动态方程和观测方程为线性方程：

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k &= \mathbf{F}_k \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{v}_k \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k \end{aligned}$$

其中, $\text{cov}(\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_l) = \mathbf{Q}_k \delta_{k-l}$, $\text{cov}(\mathbf{v}_k, \mathbf{w}_l) = \mathbf{0}$, $\text{cov}(\mathbf{w}_k, \mathbf{w}_l) = \mathbf{R}_k \delta_{k-l}$ 。求解计算可得

$$\mathbf{U}_k = -E[\nabla_{\mathbf{x}_{k-1}} \nabla_{\mathbf{x}_{k-1}}^T (\mathbf{x}_k - \mathbf{F}_k \mathbf{x}_{k-1})^T \mathbf{Q}_k^{-1} (\mathbf{x}_k - \mathbf{F}_k \mathbf{x}_{k-1})] = \mathbf{F}_k^T \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{F}_k \quad (2.98)$$

$$\mathbf{V}_k = -\mathbf{F}_k^T \mathbf{Q}_k^{-1} \quad (2.99)$$

$$\mathbf{w}_k = \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_k + \mathbf{Q}_k^{-1} \quad (2.100)$$

将式(2.98)~式(2.100)代入式(2.97)可得

$$\mathbf{J}_k(\mathbf{x}_k) = \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_k + \mathbf{Q}_k^{-1} - \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{F}_k [\mathbf{J}_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{F}_k^T \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{F}_k]^{-1} \mathbf{F}_k^T \mathbf{Q}_k^{-1} \quad (2.101)$$

从递推方程式(2.101)可知,其协方差矩阵求逆与卡尔曼滤波相同。因此,对于线性高斯系统,PCRB 和卡尔曼滤波估计协方差矩阵相等。

求解线性高斯系统的 PCRB 时,不需要计算期望方程式(2.91)~式(2.93)。在大多数情况下,很难求解出期望的闭式解,只能通过近似方法求解。最常用的是蒙特卡罗积分,它包括大量轨迹的模拟以及用求和代替积分。后续章节将会介绍关于这方面的例子。

本节介绍的 PCRB 递推计算不足之处在于它仅仅适用于转移概率密度非奇异的情况。在加性动态噪声情况下,这意味着噪声协方差矩阵必须是非奇异的。Bergman(2000^[18])提出了一种递推方法解决了这一问题。

2.8 演示实例

角度跟踪

本章介绍的跟踪算法将通过一个典型的跟踪场景进行说明。本节考虑的跟踪场景为用一机载传感器跟踪地面运动目标。如图 2.2 所示,传感器测量目标的方位角和俯仰角。那么观测方程为非线性的,必须对最优贝叶斯滤波近似。这里考虑扩展卡尔曼滤波、不敏卡尔曼滤波和两种粒子滤波。

假定观测时间间隔为固定值 T ,这里需要用方程描述每个采样时刻间的目标运动。这就需要知道目标可能运动形式的先验知识。假定目标以某一具有微小扰动的速度运动。在该运动模型当中, kT 时刻的目标状态向量 $\mathbf{x}_k = [x_k, \dot{x}_k, y_k, \dot{y}_k]^T$, 其中, (x_k, y_k) 为笛卡儿坐标系下的目标位置,点符号表示时间上的微分。描述 $(k-1)T$ 时刻和 kT 时刻间的运动方程为

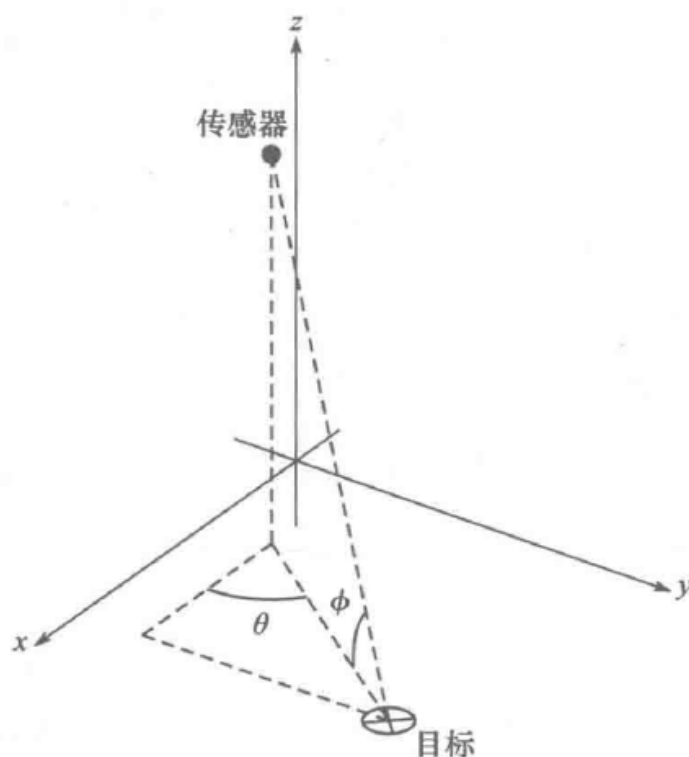


图 2.2 跟踪场景实例(角度 θ 为主位角, ϕ 为俯仰角)

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{F} \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{v}_k$$

式中: \mathbf{v}_k 为以 \mathbf{Q} 为协方差矩阵的高斯白噪声, 且

$$\mathbf{F} = \mathbf{I}_2 \otimes \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{I}_2 \otimes q \begin{bmatrix} T^3/3 & T^2/2 \\ T^2/2 & T \end{bmatrix}$$

式中: \mathbf{I}_m 为 $m \times m$ 单位矩阵; \otimes 表示矩阵张量乘积; 参数 q 表示过程噪声强度, 且控制每个方向上速度变化的大小。

令 (ξ_k, ψ_k, ζ_k) 表示 kT 时刻笛卡儿坐标下的传感器位置, $\bar{x}_k = x_k - \xi_k$ 和 $\bar{y}_k = y_k - \psi_k$ 表示目标相对于传感器的平面坐标位置。 kT 时刻的观测方程可以表示为

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{w}_k = \begin{bmatrix} \text{atan}(\bar{y}_k/\bar{x}_k) \\ \text{atan}(\xi_k/\rho_k) \end{bmatrix} + \mathbf{w}_k$$

式中: $\rho_k = \sqrt{\bar{x}_k^2 + \bar{y}_k^2}$; \mathbf{w}_k 为高斯白噪声, 与 \mathbf{v}_k 相互独立, 噪声协方差矩阵为 \mathbf{R} 。

计算 PCRB 需要计算式(2.91) ~ 式(2.93)中的 $\mathbf{U}_k, \mathbf{V}_k, \mathbf{W}_k$ 。矩阵 \mathbf{U}_k 和 \mathbf{V}_k 只与状态向量有关, 在高斯线性系统条件下可以求解得到, 且 $\mathbf{U}_k = \mathbf{F}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{F}$, $\mathbf{V}_k = -\mathbf{F}^T \mathbf{Q}^{-1}$ 。矩阵 \mathbf{W}_k 与非线性观测方程有关, 可以表示为

$$\mathbf{W}_k = E[\mathbf{H}(\mathbf{x}_k)^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}(\mathbf{x}_k)] + \mathbf{Q}^{-1} \quad (2.102)$$

上式中的期望与向量 \mathbf{x}_k 有关, 且 $\mathbf{H}(\mathbf{x}_k) = [\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x})^T]_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_k}^T$ 。计算 \mathbf{W}_k 需要雅克比矩阵 $\mathbf{H}(\mathbf{x}_k)$, 可以表示为

$$H(\mathbf{x}_k) = \begin{bmatrix} -\bar{y}_k/\rho_k^2 & 0 & \bar{x}_k/\rho_k^2 & 0 \\ -\zeta_k\bar{x}_k/[\rho_k(\rho_k^2 + \zeta_k^2)] & 0 & -\zeta_k\bar{y}_k/[\rho_k(\rho_k^2 + \zeta_k^2)] & 0 \end{bmatrix} \quad (2.103)$$

虽然通过状态方程可以求得 \mathbf{x}_k 的分布,但是式(2.102)的期望因为雅克比矩阵式(2.103)而无法求解,这里利用蒙特卡罗近似计算求解。令 $\mathbf{x}_k^1, \dots, \mathbf{x}_k^n$ 表示 kT 时刻状态向量分布函数的采样点。那么矩阵 \mathbf{W}_k 可以近似为

$$\mathbf{W}_k = \mathbf{Q}^{-1} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n H(\mathbf{x}_k^i)^T \mathbf{R}^{-1} H(\mathbf{x}_k^i)$$

通过状态转移方程可以求得每一时刻的采样粒子,即从先验分布中采样, $\mathbf{x}_0^i \sim \pi_0, i = 1, \dots, n$ 。然后在时间 T 时可得 $\mathbf{x}_1^i = \mathbf{F}_0 \mathbf{x}_0^i + \mathbf{w}_0^i, i = 1, \dots, n$,在时间 $2T$ 时可得 $\mathbf{x}_2^i = \mathbf{F}_0 \mathbf{x}_1^i + \mathbf{w}_1^i$,以此进行下去。 \mathbf{w}_k^i 是以 \mathbf{Q} 为协方差矩阵的高斯白噪声。

本节将检验不同次优滤波算法的性能。除了扩展卡尔曼滤波、不敏卡尔曼滤波之外,还考虑了两种粒子滤波:自举滤波和辅助自举滤波。在粒子滤波中选用 10000 个粒子。图 2.3 描述要分析的目标运动场景。

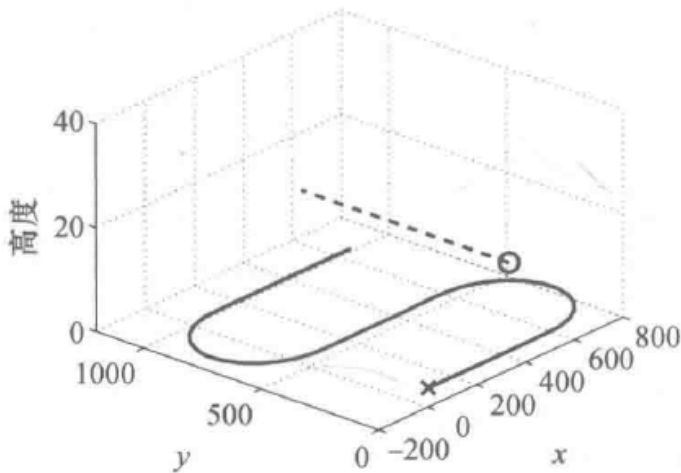


图 2.3 单目标跟踪算法性能分析仿真场景

图 2.3 中实线表示目标运动轨迹,加号表示目标在 t_1 时刻的位置。虚线表示传感器运动轨迹,圆圈表示传感器起始位置,传感器以固定速度运动。过程噪声强度 $q = 1/200$ 。初始目标状态分布为 $N(\mathbf{x}_0, \mathbf{P}_0), \mathbf{x}_0 = [350, 0, 0, 6]^T, \mathbf{P}_0 = \text{diag}(225, 25, 225, 25)$ 。目标观测时间持续 150s,时间间隔 $T = 3\text{s}$ 。观测噪声协方差矩阵为 $\mathbf{R} = \kappa^2 \mathbf{I}^2$,其中,标准偏差 κ 随着观测精度的影响而变化。利用时间平均均方根误差评价算法性能,实验仿真 1000 次,每一次实验的观测由上述模型产生。表 2.1 给出了在观测噪声标准偏差分别为 0.2、0.5、1 和 3 时的结果。

表 2.1 非机动单目标跟踪时间平均均方根误差

观测噪声标准差/(°)	EKF	UKF	BF	ABF	PCRB
0.2	7.6	7.7	7.8	7.7	5.0
0.5	10.7	10.7	22.6	10.8	7.3
1	33.6	14.9	25.6	15.5	10.4
3	112.1	52.7	33.5	28.5	18.7

当观测噪声较小时,解析近似算法表现尚好,然而噪声变大哪怕是中等观测噪声情况时性能则开始恶化。这些解析近似算法当中,不敏卡尔曼滤波算法明显优于扩展卡尔曼滤波算法。这是因为 UT 近似精度高于线性化近似。粒子滤波算法与期望的那样,明显优于其他几种解析近似算法,虽然在给定粒子数下其均方误差大于 PCRB。粒子滤波设计的重要性在这里明显显现。自举滤波即使在粒子数为 10000 时仍然会跟踪发散。辅助自举滤波虽然相对于自举滤波进行了微小改进,但是跟踪性能明显优于自举滤波算法。当 $\kappa = 0.2$ 时,辅助自举滤波跟踪效果劣于扩展卡尔曼滤波和不敏卡尔曼滤波,这是因为当观测精度较高时,目标状态的随机采样不能够充分描述感兴趣的状态空间。这一不足可以通过利用当前观测信息采样粒子的方法来改进,例如卡尔曼辅助粒子滤波算法(算法 9)。

2.9 本章小结

本章讨论了非机动单目标跟踪问题。即使是最简单的目标跟踪问题,最优贝叶斯滤波的实现也需要严格的限定条件。在大多数情况下这些限定条件不能满足,因此需要寻求近似方法实现目标跟踪。本章介绍的众多近似算法可以归结为两类:解析近似和数值近似。解析近似计算效率高,但对近似精度要求较高,这些方法包括扩展卡尔曼滤波和不敏卡尔曼滤波。数值近似方法计算效率较低,但给定足够的计算资源时可以达到最优跟踪性能,粒子滤波和点群滤波为数值近似算法。

本章没有详细分析非机动单目标跟踪的所有问题,很多近似滤波算法没有进行讨论,例如各种通过广义边界值和高斯厄米特求积(Challa, 2000^[40])近似贝叶斯后验概率密度的贝叶斯近似方法,以及有限维非线性滤波方法(Daum, 1986^[52])。目前主要研究最流行的近似滤波方法以及怎样推导出接近最优贝叶斯滤波的方法。在目标跟踪领域,这些算法的焦点在于设计一些基本的算法来解决包含机动、杂波和多目标等复杂问题。后续章节将对这些问题进行研究。

第3章 机动目标跟踪

运动特性随着时间不断变化的目标称为机动目标。当目标突然转弯或者加速,偏离被跟踪的位置,表现为机动特性。在CK贝叶斯理论框架下,本章介绍一些最常用机动目标跟踪算法的统一推导过程。

3.1 机动目标跟踪模型

一般而言,机动目标跟踪是指系统模型存在突变的状态估计问题。目标机动导致目标动力学特性发生变化,单模型的标准卡尔曼滤波在这种情况下不再适用。学者们提出了大量解决机动目标跟踪问题的方法,包括:过程噪声自适应法(Singer等,1974^[149];Moose,1975^[111];Gholson和Moose,1977^[59];Ricker和Williams,1978^[142];Moose等,1979^[112];Farina和Studer,1985^[56])、输入估计(Chan等,1979^[48])、变维滤波(Bar-shalom和Birmiwal,1982^[6])和多模型算法(IMM)(Ackerson和Fu,1970^[1];Mori等,1986^[113];Blom和Bar-shalom,1988^[29];Bar-shalom和Li,1993^[82])等。这些算法大致可以分为两类:

- (1) 基于状态增广的单模型法;
- (2) 基于马尔可夫跳跃的多模型法。

第一类方法需要机动检测和补偿过程,试图减小由于目标机动模型改变引起的滤波偏差。在自适应过程噪声方法中,目标机动被看作为额外的系统过程噪声,滤波器转换到一个与被检测到的机动相当的噪声水平。由于目标机动并非噪声,这种方法的性能受到限制。输入估计和变维滤波假定目标加速度恒定或者波动较小。当目标加速度变化剧烈时,这两种方法跟踪效果变差。

第二类方法为多模型随机混合系统。多模型(MM)算法假定任一时刻目标动态模型与有限个已知模型中的一个匹配,目标的真实运动模型会从一个到另一个随机跳变。若目标的运动模式已知且可以用有限个模型描述,相比较输入估计法和变维滤波而言,多模型算法将具有良好的跟踪性能(Farooq等,1992^[57])。可实施的多模型算法包括广义伪贝叶斯算法(Ackerson和Fu,1970^[1];Jaffer和Gupta,1971^[76])和交互作用多模型算法(IMM)(Blom和Bar-shalom,1988^[29];Blair等,1991^[26];Munir和Atherton,1994^[114])。文献中也出现了许多改进算法,例如交互作用有偏多模型算法(Blair和Waston,1992^[23])、二阶IMM算法(Blair等,1993^[25])。这些多模型算法中,IMM是最有效的跟踪算法之一(Blom和Bar-shalom,1988^[29];Bar-shalom和Li,1993^[8];Bar-shalom等,2005^[11])。很多学者应用

IMM 算法解决了大量的机动目标跟踪问题 (Tugnait, 1982^[155]; Blom 和 Bar-shalom, 1988^[29]; Farooq 等, 1992^[57]; Bar-shalom 和 Li, 1993^[8])。

所有多模型算法的一个不足是它们结构固定, 即它们使用的模型数目不变。若目标的机动特性可以用有限个模型近似描述, 多模型算法将会具有良好的跟踪性能。此外, 多模型算法假定在任一时刻其中一个模型匹配目标的真实运动状态。但实际上这些模型信息是几乎未知的。因此, 模拟目标可能的机动模式来尽可能地包含真正的运动模型, 将导致模型数量十分庞大。正如 Li 和 Bar-shalom (1996^[90])所指出的, 这种方法除了增加计算量之外, 过多的模型数量并不一定会提高目标的跟踪性能, 有时反而会降低跟踪性能。变结构多模型 (VSMM) 算法是解决上述问题的一种有效途径。

Li 和 Bar-shalom 在文献[89]中首次提出 VSMM 算法, 并在文献[87]和文献[90]中确定了基本框架。VSMM 是 MM 的扩展, 标准固定结构多模型 (FSMM) 可以看作是 VSMM 的一个特例。模型集切换主要基于有向图切换 (DS)、自适应网格 (AD) 或递推自适应模型集 (RAMS) (Li 和 Bar-shalom, 1992^[87]; Li, 2000^[88])。理想情况下, VSMM 在每一时刻利用尽可能少的模型来降低计算量并同时获得与使用大量模型时相当的跟踪精度。目前变结构多模型算法包括模型组切换算法 (MSG) (Li 等, 1999^[94])、可能模型算法 (LMS) (Li 和 Zhang, 2000^[93]) 以及最小子模型切换算法 (MSMSS) (Wang 等, 2003^[162])。MSMSS 基于这样的假设: 机动目标的动力学特性是一个连续变量, 在任意时刻代表模型空间一个特定的点。因此, 在给定时刻, 包含该点的最小数目的模型必须包含在当前模型集当中。

3.1.1 单模型状态增广

在线性目标运动模型中, 当目标加速度作为一个分量包含在目标状态向量中时, 这种状态空间模型称为常加速度模型 (CA), 否则称为常速度模型 (CV) (Bar-shalom 和 Fortmann, 1988^[7]; Bar-shalom 和 Li, 1993^[8])。换言之, CV 模型的状态向量可以表示为

$$\mathbf{x} = [\text{位置}, \text{速度}]'$$

CA 模型的状态向量表示为

$$\mathbf{x} = [\text{位置}, \text{速度}, \text{加速度}]' = [\mathbf{x}, \mathbf{u}]'$$

式中: \mathbf{u} 为目标加速度 (向量)。目标状态的条件概率密度函数可以表示为

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}^k) = \frac{1}{c} p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k, \mathbf{y}^{k-1}) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}^{k-1}) \\ \frac{1}{c} p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k) \int p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{y}^{k-1}) d\mathbf{x}_{k-1} \quad (3.1)$$

式中: $\mathbf{y}^k = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_k)$ 为直到 k 时刻的观测集合。式 (3.1) 的第一部分为似然函数, c 为归一化因数, 式 (3.1) 中的积分部分为 Chapman-Kolmogorov 方程。上

述递推公式表明这一条件概率密度完全由似然函数 $p(y_k | x_k)$ 和状态转移函数 $p(x_k | x_{k-1})$ 以及先验分布 $p(x_{k-1} | y^{k-1})$ 确定。在线性高斯假设条件下,上述密度函数都为高斯形式,即式(3.1)导出标准的卡尔曼滤波。

3.1.2 多模型算法

将 x_k 用 (x_k, u_k) 代替,式(3.1)也可以写为

$$\begin{aligned} p(x_k, u_k | y^k) &= \frac{1}{c} p(y_k | x_k, u_k) \int_{x_{k-1}} \int_{u_{k-1}} p(x_k, u_k | x_{k-1}, u_{k-1}) \times \\ &\quad p(x_{k-1}, u_{k-1} | y^{k-1}) dx_{k-1} du_{k-1} \end{aligned} \quad (3.2)$$

即将 x_k 用 x_k 和 u_k 的扩展代替。将 u_k 离散化,并只关注状态向量的一部分,可以导出标准 MM 方法。

在 MM 方法中,假定目标加速度 u_k 属于一个离散模型集合,即 $u_k \in \{s_1, s_2, \dots, s_N\}$, 而且模型之间的转换由马尔可夫链控制。因此,式(3.2)可以表达为

$$p(x_k, u_k | y^k) = p(x_k, u_k = s_i | y^k), \quad \forall i = 1, 2, \dots, N \quad (3.3)$$

对每一个 $p(x_k, u_k = s_i | y^k)$ 应用贝叶斯理论,可得

$$\begin{aligned} p(x_k, u_k = s_i | y^k) &= \frac{1}{c} p(y_k | x_k, u_k = s_i) \int \sum_{s_j \in S} p(x_k, u_k = s_i | x_{k-1}, u_{k-1} = s_j) \times \\ &\quad p(x_{k-1}, u_{k-1} = s_j | y^{k-1}) dx_{k-1} \\ &= \int \sum_{s_j \in S} p(x_k | x_{k-1}, u_{k-1} = s_j) p(u_k = s_i | u_{k-1} = s_j) \times \\ &\quad p(x_{k-1}, u_{k-1} = s_j | y^{k-1}) dx_{k-1} \end{aligned} \quad (3.4)$$

对 $i = 1, 2, \dots, N$, 积分在目标位置和速度空间上进行,求和运算则在离散模型集 S 上进行; $p(u_k = s_i | u_{k-1} = s_j)$ 为模型转换概率矩阵的第 (i, j) 个分量,假定模型转换概率独立于系统状态 x 。当 u_k 假定为连续变量时,则与式(3.2)相对应。综上所述,可以得出以下结论:

- (1) 在 MM 估计中,式(3.4)是合成状态向量条件概率密度的最优解。
- (2) 基本状态向量 x_k 的后验概率密度为

$$\begin{aligned} p(x_k | y^k) &= \sum_{s_j \in S} p(x_k, u_k = s_i | y^k) \\ &= \sum_{s_j \in S} p(x_k | u_k = s_i, y^k) p(u_k = s_i | y^k) \end{aligned} \quad (3.5)$$

基于此,MM 方法中,向量 x_k 的条件概率密度是高斯混合而非高斯。 $p(u_k = s_i | y^k)$ 是 k 时刻假定目标处于 s_i 模型状态时的条件概率。

- (3) 在每一个采样时刻 k ,用高斯分布来近似原状态向量 x_k 的后验概率可以

构造次优 GPB1 算法。此外,如果每 $n-1$ 个采样间隔的状态向量 \mathbf{x}_k 的条件概率可以用高斯分布近似,则由式(3.4)和式(3.5)可以构造出 GPB- n 算法。

(4) 当模型集 S 中的模型数量 N 为无穷大时,即 $N \rightarrow \infty$ 且模型转换概率用高斯核函数表示,式(3.4)中的求和步骤变为积分形式,且式(3.4)就转换为式(3.1) (CA 模型)的形式,由于高阶 CA 模型的存在,这是最差的情况。如果目标的真实运动模型集是未知的,那么 MM 算法中加速度模型的数量将趋于无穷大。由于 CA 模型的性能较差,包含大量模型的 MM 算法性能也较差。

(5) 在每一时刻通过选择模型转移概率矩阵,次优 VAMM 算法减小了计算量,式(3.4)和式(3.5)中的求和步骤仅仅考虑那些模型概率超过某一门限的模型。

固定结构和变结构多模型是机动目标跟踪的主要方法。后续章节将介绍单机动目标的最优贝叶斯滤波算法以及 GPB1、GPB2 MM 算法、IMM、VS-IMM 和 MSMSS 的推导。本章主要考虑基于马尔可夫法则转换的模型,这种模型称为跳变马尔可夫系统(JMS)。

3.2 最优贝叶斯滤波

3.2.1 过程、观测和噪声模型

在跳变马尔可夫系统中,目标的动态特性假定属于以下模型集:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}_{r_k}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_k) + \mathbf{v}_{r_k}, \quad r_k \in \{1, 2, \dots, d\} \quad (3.6)$$

过程噪声 \mathbf{v}_{r_k} 为加性噪声, r_k 是在状态空间 $\{1, 2, \dots, d\}$ 内满足一致性离散马尔可夫链的随机变量。转移概率矩阵为 Γ , 且满足

$$\Gamma_{ji} = \Pr(r_k = i \mid r_{k-1} = j)$$

假定初始概率 $\Pr(r_0 = i) = \pi_0(i)$ 为已知的。通常,假定观测与模型和目标真实状态有关,观测方程可以表示为

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{h}_{r_k}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{w}_{r_k} \quad (3.7)$$

若在 k 时刻,起作用的模型已知,那么式(3.6)和式(3.7)退化为式(2.1)和式(2.2),同样可以应用卡尔曼滤波或扩展卡尔曼滤波方法求解后验概率密度。但是一般情况下哪个模型起作用并不是先验信息,且模型转换是一个以马尔可夫过程跳变的随机变量。因此,真正起作用的模型是未知的。但是可以把它看做与目标状态有关的随机变量,通过估计得到,从而可构造复合状态向量 (\mathbf{x}_k, r_k) 。观测 $\mathbf{y}^k = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_k)$ 包含这个复合状态向量的信息,通过贝叶斯理论可以计算得到联合概率密度 $p(\mathbf{x}_k, r_k \mid \mathbf{y}^k)$ 。由于 r_k 是取值为 $\{1, 2, \dots, d\}$ 的离散随机变量,联合概率密度可以分为 d 个分量,即

$$p(\mathbf{x}_k, r_k = i \mid \mathbf{y}^k), \quad i = \{1, 2, \dots, d\}$$

在目标跟踪领域,包括机动目标跟踪,所要得到的是后验概率密度 $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}^k)$, 联合概率密度循环可以作为求解这一后验概率密度的中间步骤。利用全概率公式,对联合概率密度求和可以得到目标状态的后验概率密度,即

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}^k) = \sum_{i=1}^d p(\mathbf{x}_k, r_k = i | \mathbf{y}^k)$$

通过条件概率引理,上式右侧的联合概率密度可以分解为两部分,即

$$p(\mathbf{x}_k, r_k = i | \mathbf{y}^k) = p(\mathbf{x}_k | r_k = i, \mathbf{y}^k) p(r_k = i | \mathbf{y}^k) \quad (3.8)$$

将 $\mu_{k|i}(i) = p(r_k = i | \mathbf{y}^k)$ 代入式(3.8)可得

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}^k) = \sum_{i=1}^d p(\mathbf{x}_k | r_k = i, \mathbf{y}^k) \mu_{k|i}(i) \quad (3.9)$$

式(3.9)右侧的第一项是第 i 个模型为正确模型的目标状态概率密度。第二项是基于观测信息集 \mathbf{y}^k 的第 i 个模型概率。通过贝叶斯迭代可以求得这两个分量。

3.2.2 条件概率密度和模型概率

将观测集 \mathbf{y}^k 展开为 $\{\mathbf{y}_k, \mathbf{y}^{k-1}\}$ 可以推导出式(3.9)右侧第一项的贝叶斯递推形式,利用贝叶斯理论可得

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_k | r_k = i, \mathbf{y}^k) &= p(\mathbf{x}_k | r_k = i, \mathbf{y}_k, \mathbf{y}^{k-1}) \\ &= \frac{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k, r_k = i, \mathbf{y}^{k-1})}{p(\mathbf{y}_k | r_k = i, \mathbf{y}^{k-1})} p(\mathbf{x}_k | r_k = i, \mathbf{y}^{k-1}) \end{aligned} \quad (3.10)$$

式中: $p(\mathbf{x}_k | r_k = i, \mathbf{y}^{k-1})$ 为预测概率密度; $p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k, r_k = i, \mathbf{y}^{k-1})$ 为似然函数; $p(\mathbf{y}_k | r_k = i, \mathbf{y}^{k-1})$ 为归一化因数。

同样,联合概率密度式(3.8)的第二项,条件模型概率 $\mu_{k/i}(i) = p(r_k = i | \mathbf{y}^k)$ 也可以通过递推计算得到。同样将 \mathbf{y}^k 展开为 $\{\mathbf{y}_k, \mathbf{y}^{k-1}\}$, 利用贝叶斯理论可得

$$\mu_{k|i}(i) = p(r_k = i | \mathbf{y}_k, \mathbf{y}^{k-1}) = \frac{p(\mathbf{y}_k | r_k = i, \mathbf{y}^{k-1}) p(r_k = i | \mathbf{y}^{k-1})}{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{y}^{k-1})}$$

令 $p(r_k = i | \mathbf{y}^{k-1}) = \mu_{k-1|i}(i)$, 条件模型概率可表示为

$$\mu_{k|i}(i) = p(r_k = i | \mathbf{y}^k) = \frac{p(\mathbf{y}_k | r_k = i, \mathbf{y}^{k-1}) \mu_{k-1|i}(i)}{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{y}^{k-1})} \quad (3.11)$$

式中: $\mu_{k-1|i}(i)$ 为模型预测概率; $p(\mathbf{y}_k | r_k = i, \mathbf{y}^{k-1})$ 为似然函数; $p(\mathbf{y}_k | \mathbf{y}^{k-1})$ 为归一化因数。

3.2.3 最优估计

1. 预测概率密度和预测模型概率

若已知先验目标状态 \mathbf{x}_{k-1} , 预测概率密度展开为

$$p(\mathbf{x}_k | r_k = i, \mathbf{y}^{k-1}) = \int_{\mathbf{x}_{k-1}} p(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k-1} | r_k = i, \mathbf{y}^{k-1}) d\mathbf{x}_{k-1}$$

利用条件概率引理,对积分内的 $p(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k-1} | r_k = i, \mathbf{y}^{k-1})$ 展开,可得预测概率密度为

$$p(\mathbf{x}_k | r_k = i, \mathbf{y}^{k-1}) = \int_{\mathbf{x}_{k-1}} p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, r_k = i, \mathbf{y}^{k-1}) p(\mathbf{x}_{k-1} | r_k = i, \mathbf{y}^{k-1}) d\mathbf{x}_{k-1} \quad (3.12)$$

积分函数第一项为状态转移密度函数,由式(3.6)可以得到其概率分布为

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, r_k = i, \mathbf{y}^{k-1}) = p_{v_i}(\mathbf{x}_k - \mathbf{f}_{r_k=i}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_k))$$

其中, $v_i = v_{r_k=i}$ 且 $i(\cdot) = \mathbf{f}_{r_k=i}(\cdot)$ 。

式(3.12)的积分函数第二项利用在 $k-1$ 时刻的所有模型由全概率公式可以重新展开为

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_{k-1} | r_k = i, \mathbf{y}^{k-1}) &= \sum_{j=1}^d p(\mathbf{x}_{k-1} | r_{k-1} = j, r_k = i, \mathbf{y}^{k-1}) p(r_{k-1} = j | r_k = i, \mathbf{y}^{k-1}) \\ &= \sum_{j=1}^d p(\mathbf{x}_{k-1} | r_{k-1} = j, \mathbf{y}^{k-1}) p(r_{k-1} = j | r_k = i, \mathbf{y}^{k-1}) \\ &= \sum_{j=1}^d p(\mathbf{x}_{k-1} | r_{k-1} = j, \mathbf{y}^{k-1}) \mu_{k-1,j|i} \end{aligned} \quad (3.13)$$

式(3.13)称为混合步。混合概率 $\mu_{k-1,j|i} = p(r_{k-1} = j | r_k = i, \mathbf{y}^{k-1})$ 可以由下式计算出:

$$\begin{aligned} \mu_{k-1,j|i} &= p(r_{k-1} = j | r_k = i, \mathbf{y}^{k-1}) \\ &= \frac{p(r_k = i | r_{k-1} = j, \mathbf{y}^{k-1}) p(r_{k-1} = j | \mathbf{y}^{k-1})}{p(r_k = i | \mathbf{y}^{k-1})} \\ &= \frac{1}{c_{2j}} \Gamma_{ji} \mu_{k-1|k-1}(j) \end{aligned}$$

其中, $c_{2j} = \sum_i \Gamma_{ji} \mu_{k-1|k-1}(j)$ 且 $p(r_{k-1} = j | \mathbf{y}^{k-1}) = \mu_{k-1|k-1}(j)$ 。

式(3.13)中的混合步可以由下式计算得出:

$$p(\mathbf{x}_{k-1} | r_k = i, \mathbf{y}^{k-1}) = \sum_{j=1}^d p(\mathbf{x}_{k-1} | r_{k-1} = j, \mathbf{y}^{k-1}) \mu_{k-1,j|i} \quad (3.14)$$

利用式(3.14)可以得到式(3.12)的预测概率密度如下:

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_k | r_k = i, \mathbf{y}^{k-1}) &= \int_{\mathbf{x}_{k-1}} p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, r_k = i, \mathbf{y}^{k-1}) \sum_{j=1}^d p(\mathbf{x}_{k-1} | r_{k-1} = j, \mathbf{y}^{k-1}) \mu_{k-1,j|i} d\mathbf{x}_{k-1} \\ &= \sum_{j=1}^d \mu_{k-1,j|i} \int_{\mathbf{x}_{k-1}} p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, r_k = i, \mathbf{y}^{k-1}) p(\mathbf{x}_{k-1} | r_{k-1} = j, \mathbf{y}^{k-1}) d\mathbf{x}_{k-1} \end{aligned} \quad (3.15)$$

目标机动的预测概率为

$$\mu_{k|k-1}(i) = \sum_{j=1}^d \Gamma_{ji} \mu_{k-1|k-1}(j) \quad (3.16)$$

目标机动概率更新可以进一步简化为

$$\mu_{k|k}(i) = \frac{p(\mathbf{y}_k | r_k = i, \mathbf{y}^{k-1}) \sum_{j=1}^d \Gamma_{ji} \mu_{k-1|k-1}(j)}{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{y}^{k-1})} \quad (3.17)$$

2. 似然函数

式(3.10)和式(3.17)中的似然函数可以通过观测式(3.7)求得:

$$\begin{aligned} p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k, r_k = i, \mathbf{y}^{k-1}) &= p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k, r_k = i) \\ &= p_{w_{r_k=i}}(\mathbf{y}_k - \mathbf{h}_{r_k=i}(\mathbf{x}_k)) \\ &= p_{w_i}(\mathbf{y}_k - \mathbf{h}_i(\mathbf{x}_k)) \end{aligned} \quad (3.18)$$

机动概率更新方程式(3.17)中的似然函数利用相似的方法可以展开为

$$\begin{aligned} p(\mathbf{y}_k | r_k = i, \mathbf{y}^{k-1}) &= \int_{\mathbf{x}_k} p(\mathbf{y}_k, \mathbf{x}_k | r_k = i, \mathbf{y}^{k-1}) d\mathbf{x}_k \\ &= \int_{\mathbf{x}_k} p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k, r_k = i, \mathbf{y}^{k-1}) p(\mathbf{x}_k | r_k = i, \mathbf{y}^{k-1}) d\mathbf{x}_k \end{aligned} \quad (3.19)$$

式(3.19)积分函数第一项由式(3.18)给出,第二项由式(3.12)给出。

3. 归一化因数

在式(3.10)中归一化因数为 $p(\mathbf{y}_k | r_k = i, \mathbf{y}^{k-1})$, 对于每一个 $i \in \{1, 2, \dots, d\}$, 它由式(3.19)给出。在式(3.17)中归一化因数为 $p(\mathbf{y}_k | \mathbf{y}^{k-1})$, 通过式(3.16)展开可以得到

$$\begin{aligned} p(\mathbf{y}_k | \mathbf{y}^{k-1}) &= \sum_{i=1}^d p(\mathbf{y}_k | r_k = i, \mathbf{y}^{k-1}) p(r_k = i | \mathbf{y}^{k-1}) \\ &= \sum_{i=1}^d p(\mathbf{y}_k | r_k = i, \mathbf{y}^{k-1}) \mu_{k|k-1}(i) \\ &= \sum_{i=1}^d p(\mathbf{y}_k | r_k = i, \mathbf{y}^{k-1}) \sum_{j=1}^d \Gamma_{ji} \mu_{k-1|k-1}(j) \end{aligned} \quad (3.20)$$

4. 最优估计

将式(3.10)和式(3.17)代入式(3.9)可以求出目标状态的条件概率 $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}^k)$ 。目标状态的最小均方估计和协方差矩阵可以表示为

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{k|k} &= \int_{\mathbf{x}_k} \mathbf{x}_k p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}^k) d\mathbf{x}_k \\ \mathbf{P}_{k|k} &= \int_{\mathbf{x}_k} [\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k}] [\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k}]^T p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}^k) d\mathbf{x}_k \end{aligned}$$

利用式(3.9),均值和方差可以进一步简化为

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \int_{\mathbf{x}_k} \mathbf{x}_k \sum_{i=1}^d p(\mathbf{x}_k | r_k = i, \mathbf{y}^k) \mu_{k|k}(i) d\mathbf{x}_k$$

$$\mathbf{P}_{k|k} = \int_{\mathbf{x}_k} [\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k}] [\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k}]^T \sum_{i=1}^d p(\mathbf{x}_k | r_k = i, \mathbf{y}^k) \mu_{k|k}(i) d\mathbf{x}_k$$

重新排列求和与积分项,可得条件均值和方差为

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \sum_{i=1}^d \left(\int_{\mathbf{x}_k} \mathbf{x}_k p(\mathbf{x}_k | r_k = i, \mathbf{y}^k) d\mathbf{x}_k \right) \mu_{k|k}(i) \quad (3.21)$$

$$\mathbf{P}_{k|k} = \sum_{i=1}^d \left(\int_{\mathbf{x}_k} [\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k}] [\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k}]^T p(\mathbf{x}_k | r_k = i, \mathbf{y}^k) d\mathbf{x}_k \right) \mu_{k|k}(i) \quad (3.22)$$

常用的多模型滤波算法如 GPB1,GPB2 和 IMM 仅仅是近似最优贝叶斯迭代的方法不同,这些算法在后续章节中介绍。

3.3 广义伪贝叶斯滤波

3.3.1 一阶广义伪贝叶斯滤波

3.2.1 节给出了机动目标跟踪的系统方程。在一阶伪贝叶斯滤波算法(Ackerson 和 Fu,1970^[1];Bar-Shalom 等,2001^[15])中,对目标动态方程作如下假设:首先,假定 $f_{r_k}(\cdot)$ 为目标状态的线性函数;其次,加性噪声是方差为 \mathbf{Q}_{r_k} 的零均值高斯白噪声;最后,在初始时刻的目标状态先验概率密度是以 $\hat{\mathbf{x}}_0$ 和 \mathbf{Q}_0 为均值和方差的高斯分布。基于以上假设,目标状态方程可以表示为 $\mathbf{x}_k = \mathbf{F}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{u}_k + \mathbf{v}_k$,其中, \mathbf{u}_k 为未知的系统输入量。输入估计算法假定系统的未知输入量为确定性值,当检测到目标机动时利用最小均方估计来估计未知输入量。Chan 等,1979^[48] 首先提出这一思想,Bar-shalom 和 Fortmann,1988^[7] 以及 Bar-shalom 和 Li,1993^[8] 分别对这一思想进行了发展。在 GPB1 中, $\{\mathbf{F}, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k\}$ 的三个分量是随机变量 r_k 的函数, r_k 为状态空间 $\{1, \dots, d\}$ 上的一致性离散马尔可夫链,转移概率密度矩阵为 $\mathbf{\Gamma}$,其中

$$\Gamma_{ji} = \Pr(r_k = i | r_{k-1} = j)$$

其初始条件为 $\Pr(r_0 = i) = \pi_0(i)$ 。GPB1 系统模型可以表示为

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{F}_{r_k} \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{u}_{r_k} + \mathbf{v}_{r_k} \quad (3.23)$$

观测假定目标状态的线性函数与模型状态 r_k 独立。基于以上假设,式(3.7)可以表示为

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{H}\mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k \quad (3.24)$$

式(3.10)给出的条件概率密度为

$$p(\mathbf{x}_k | r_k = i, \mathbf{y}^k) = \frac{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k, r_k = i, \mathbf{y}^{k-1}) p(\mathbf{x}_k | r_k = i, \mathbf{y}^{k-1})}{p(\mathbf{y}_k | r_k = i, \mathbf{y}^{k-1})}$$

由式(3.17)可得模型条件概率为

$$\mu_{k|k}(i) = \frac{p(\mathbf{y}_k | r_k = i, \mathbf{y}^{k-1}) \sum_{j=1}^d \Gamma_{ji} \mu_{k-1|k-1}(j)}{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{y}^{k-1})}$$

在高斯分布假设条件下,本节推导这些概率密度分布。

1. 转移概率密度

依据式(3.6)定义的动态模型,转移概率密度为

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, r_k = i, \mathbf{y}^{k-1}) = p_{v_i}(\mathbf{x}_k - \mathbf{F}_i \mathbf{x}_{k-1} - \mathbf{u}_i) \quad (3.25)$$

由于 v_i 是方差为 \mathbf{Q}_i 且零均值的高斯白噪声,转移概率密度可以简化为

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, r_k = i, \mathbf{y}^{k-1}) = N(\mathbf{x}_k; \mathbf{F}_i \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{u}_i, \mathbf{Q}_i) \quad (3.26)$$

2. 预测概率密度和预测模型概率

将式(3.25)代入式(3.12),预测概率密度展开为

$$p(\mathbf{x}_k | r_k = i, \mathbf{y}^{k-1}) = \int_{\mathbf{x}_{k-1}} p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, r_k = i, \mathbf{y}^{k-1}) p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{y}^{k-1}) d\mathbf{x}_{k-1}$$

GPB1 近似:上式积分公式中最后一项为目标状态先验概率密度,可以近似为

$$p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{y}^{k-1}) \approx N(\mathbf{x}_{k-1}; \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \mathbf{P}_{k-1|k-1})$$

式(3.26)积分公式的第一项为转移概率密度,将高斯分布的转移概率密度和先验概率密度代入积分方程,可得

$$p(\mathbf{x}_k | r_k = i, \mathbf{y}^{k-1}) = \int_{\mathbf{x}_{k-1}} N(\mathbf{x}_k; \mathbf{F}_i \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{u}_i, \mathbf{Q}_i) N(\mathbf{x}_{k-1}; \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \mathbf{P}_{k-1|k-1}) d\mathbf{x}_{k-1}$$

上述积分形式简化为高斯分布形式(见附录 C)

$$p(\mathbf{x}_k | r_k = i, \mathbf{y}^{k-1}) = N(\mathbf{x}_k; \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^i, \mathbf{P}_{k|k-1}^i) \quad (3.27)$$

均值和方差分别为

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^i = \mathbf{F}_i \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} + \mathbf{u}_i \quad (3.28)$$

$$\mathbf{P}_{k|k-1}^i = \mathbf{F}_i \mathbf{P}_{k-1|k-1} \mathbf{F}_i^T + \mathbf{Q}_i \quad (3.29)$$

第二项分量的预测值为

$$\begin{aligned} p(r_k = i | \mathbf{y}^{k-1}) &= \sum_{j=1}^d p(r_k = i | r_{k-1} = j, \mathbf{y}^{k-1}) p(r_{k-1} = j | \mathbf{y}^{k-1}) \\ &= \sum_{j=1}^d \Gamma_{ji} p(r_{k-1} = j | \mathbf{y}^{k-1}) \end{aligned} \quad (3.30)$$

这里的求解计算不需要任何近似。式(3.28)、式(3.29)、式(3.30)构成了 GPB1 滤波的预测方程。

3. 似然函数

GPB1 中有两个似然函数需要计算,一个对应式(3.18)中的目标动力学状态,

另一个对应式(3.19)中的目标模型状态。两个似然函数的推导都需要式(3.7)的观测方程,其假定观测信息与模型相互独立,简化为式(3.24),其中 $w_k = y_k - Hx_k$ 。考虑到观测信息的独立性且 $p_{w_{k_i}}(\cdot)$ 为高斯分布,则式(3.18)中的似然函数为

$$p(y_k | x_k, r_k = i, y^{k-1}) = p(y_k | x_k) = N(y_k; Hx_k, R_k)$$

式(3.19)的第二个似然函数为

$$\begin{aligned} p(y_k | r_k = i, y^{k-1}) &= \int_{x_k} p(y_k | x_k, r_k = i, y^{k-1}) p(x_k | r_k = i, y^{k-1}) dx_k \\ &= \int_{x_k} N(y_k; Hx_k, R_k) N(x_k; \hat{x}_{k-1|k-1}^i, P_{k-1|k-1}^i) dx_k \end{aligned} \quad (3.31)$$

积分方程式(3.31)的第二项由式(3.27)给出,其也是高斯分布形式。令 $\lambda_k(i) = p(y_k / r_k = i, y^{k-1})$, 其可以简化为(见附录 C)

$$\lambda_k(i) = N(y_k; H\hat{x}_{k-1|k-1}^i, HP_{k-1|k-1}^i H^T + R_k) \quad (3.32)$$

4. 归一化因数

式(3.10)中的归一化因数 $p(y_k | r_k = i, y^{k-1})$ 由式(3.32)给定。式(3.17)中的归一化因数由式(3.20)给定。将式(3.32)和式(3.30)代入上述各式可得

$$\begin{aligned} p(y_k | y^{k-1}) &= \sum_{i=1}^d p(y_k | r_k = i, y^{k-1}) p(r_k = i | y^{k-1}) \\ &= \sum_{i=1}^d p(y_k | r_k = i, y^{k-1}) \sum_{j=1}^d \Gamma_{ji} \mu_{k-1|k-1}(j) \\ &= \sum_{i=1}^d \lambda_k(i) \sum_{j=1}^d \Gamma_{ji} \mu_{k-1|k-1}(j) \end{aligned} \quad (3.33)$$

5. 条件概率密度和条件模型概率

条件概率密度可以表示为

$$p(x_k | r_k = i, y^k) = \frac{p(y_k | x_k, r_k = i, y^{k-1}) p(x_k | r_k = i, y^{k-1})}{p(y_k | r_k = i, y^{k-1})}$$

上述方程所有分量为高斯分布,则

$$p(x_k | r_k = i, y^k) = \frac{N(y_k; Hx_k, R_k) N(x_k; \hat{x}_{k-1|k-1}^i, P_{k-1|k-1}^i)}{N(y_k; H\hat{x}_{k-1|k-1}^i, HP_{k-1|k-1}^i H^T + R_k)}$$

上式可以简化为单一高斯形式(见附录 C),即

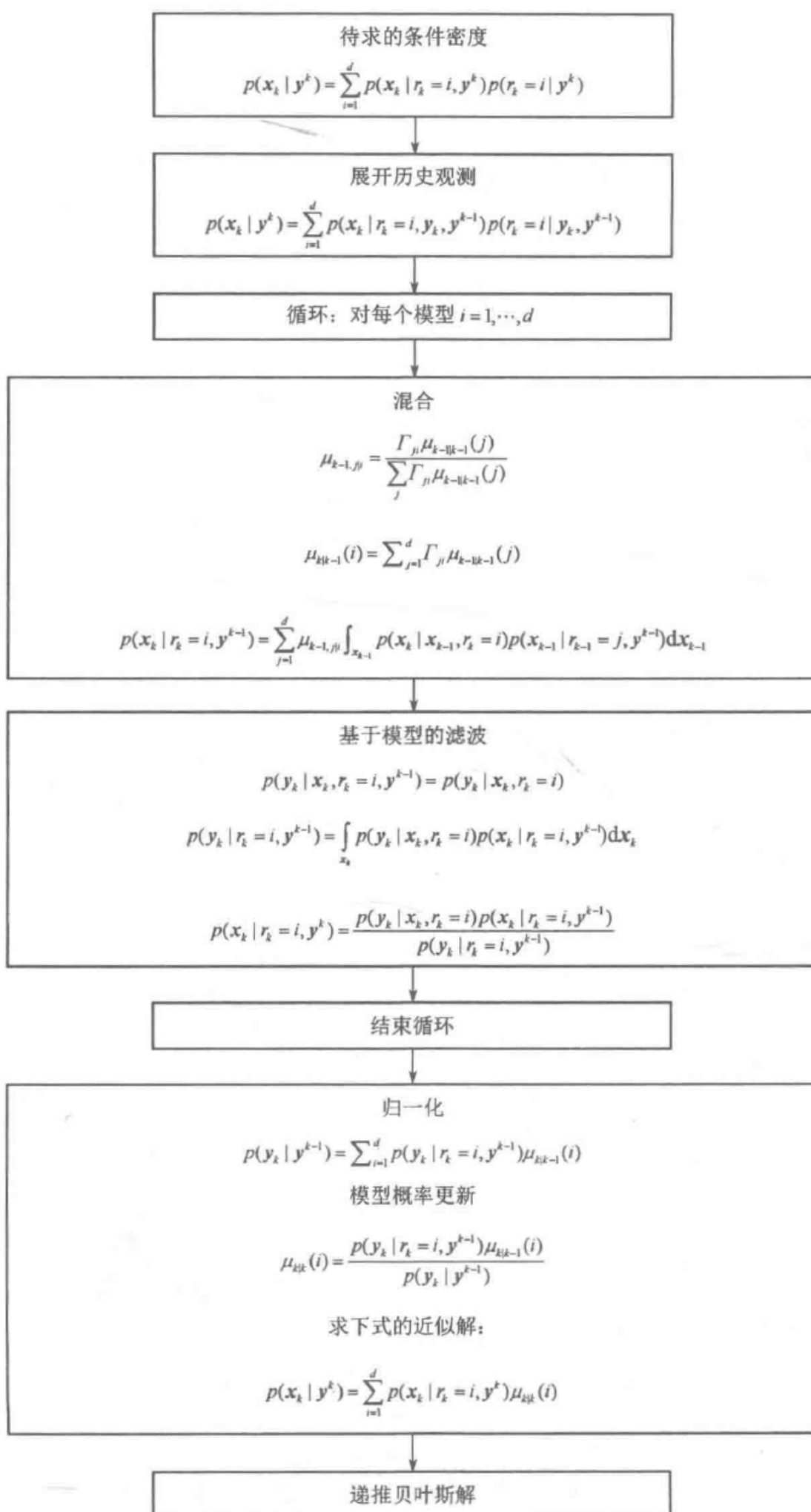
$$p(x_k | r_k = i, y^k) = N(x_k; \hat{x}_{k|k}^i, P_{k|k}^i)$$

其中,均值和协方差分别为

$$\hat{x}_{k|k}^i = \hat{x}_{k-1|k-1}^i + P_{k-1|k-1}^i H^T (HP_{k-1|k-1}^i H^T + R_k)^{-1} (y_k - H\hat{x}_{k-1|k-1}^i) \quad (3.34)$$

$$P_{k|k}^i = P_{k-1|k-1}^i - P_{k-1|k-1}^i H^T (HP_{k-1|k-1}^i H^T + R_k)^{-1} HP_{k-1|k-1}^i \quad (3.35)$$

由式(3.17)可得条件模型概率为



递推贝叶斯框架下的机动目标跟踪

$$\mu_{k|k}(i) = \frac{p(\mathbf{y}_k | r_k = i, \mathbf{y}^{k-1}) \sum_{j=1}^d \Gamma_{ji} \mu_{k-1|k-1}(j)}{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{y}^{k-1})}$$

将式(3.32)和式(3.33)代入上式可得

$$\mu_{k|k}(i) = \frac{\lambda_k(i) \sum_{j=1}^d \Gamma_{ji} \mu_{k-1|k-1}(j)}{\sum_{l=1}^d \lambda_k(l) \sum_{m=1}^d \Gamma_{ml} \mu_{k-1|k-1}(m)} \quad (3.36)$$

6. GPB 1 估计

条件概率密度为高斯混合,如下式所示:

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}^k) \approx \sum_{i=1}^d p(\mathbf{x}_k | r_k = i, \mathbf{y}^k) \mu_{k|k}(i)$$

对于任意 i , $p(\mathbf{x}_k | r_k = i, \mathbf{y}^k)$ 为高斯分布。这个高斯混合可以用一个高斯分布近似,即

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_k) \approx N(\mathbf{x}_k; \hat{\mathbf{x}}_{k|k}, \mathbf{P}_{k|k})$$

将式(3.34)、式(3.35)和式(3.36)代入式(3.21)和式(3.22),可得其均值和协方差为

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{k|k} &= \sum_{i=1}^d \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^i \mu_{k|k}(i) \\ \mathbf{P}_{k|k} &= \sum_{i=1}^d \mu_{k|k}(i) [\mathbf{P}_{k|k}^i + (\hat{\mathbf{x}}_{k|k} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^i)(\hat{\mathbf{x}}_{k|k} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^i)^T] \end{aligned}$$

GPB1 估计过程就是一个高斯求和的步骤,可以表示为

$$[\hat{\mathbf{x}}_{k|k}, \mathbf{P}_{k|k}] = \text{GMix}[\{\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^i, \mathbf{P}_{k|k}^i, \mu_{k|k}(i)\}_i]$$

其均值和方差分别为各高斯分量的均值和方差的加权和,第 i 个高斯分量的均值和方差分别为 $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^i, \mathbf{P}_{k|k}^i$, 其对应权值为 $\mu_{k|k}(i) \in [0, 1]$ 且 $\sum_{i=1}^d \mu_{k|k}(i) = 1$:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{k|k} &= \sum_{i=1}^d \mu_{k|k}(i) \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^i \\ \mathbf{P}_{k|k} &= \sum_{i=1}^d \mu_{k|k}(i) (\mathbf{P}_{k|k}^i + \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^i (\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^i)^T) - \hat{\mathbf{x}}_{k|k} \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^T \end{aligned}$$

算法 10 GPB1 算法迭代方程

(1) **for** 对于每一个模型 i **do**

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^i &= \mathbf{F}_i \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}^i + \mathbf{u}_i \\ \mathbf{P}_{k|k-1}^i &= \mathbf{F}_i \mathbf{P}_{k-1|k-1}^i \mathbf{F}_i^T + \mathbf{Q}_i \\ \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^i &= \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^i + \mathbf{P}_{k|k-1}^i \mathbf{H}^T (\mathbf{H} \mathbf{P}_{k|k-1}^i \mathbf{H}^T + \mathbf{R}_k)^{-1} (\mathbf{y}_k - \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^i) \\ \mathbf{P}_{k|k}^i &= \mathbf{P}_{k|k-1}^i - \mathbf{P}_{k|k-1}^i \mathbf{H}^T (\mathbf{H} \mathbf{P}_{k|k-1}^i \mathbf{H}^T + \mathbf{R}_k)^{-1} \mathbf{H} \mathbf{P}_{k|k-1}^i \end{aligned}$$

$$\lambda_k(i) = N(y_k; H\hat{x}_{k|k-1}^i, HP_{k|k-1}^i H^T + R_k)$$

(2) end for

(3) for 对于每一个模型 i do

$$\mu_{k|k}(i) = \frac{\lambda_k(i) \sum_{j=1}^d \Gamma_{ji} \mu_{k-1|k-1}(j)}{\sum_{l=1}^d \lambda_k(l) \sum_{m=1}^d \Gamma_{ml} \mu_{k-1|k-1}(m)}$$

(4) end for

(5) 状态更新和协方差更新

$$\hat{x}_{k|k} = \sum_{i=1}^d \hat{x}_{k|k}^i \mu_{k|k}(i)$$

$$P_{k|k} = \sum_{i=1}^d \mu_{k|k}(i) [P_{k|k}^i + (\hat{x}_{k|k}^i - \hat{x}_{k|k})(\hat{x}_{k|k} - \hat{x}_{k|k}^i)^T]$$

3.3.2 二阶广义伪贝叶斯滤波

1. 目标状态模型、传感器观测模型和噪声模型

二阶广义伪贝叶斯滤波(GPB2)是GPB1的发展,但是它涉及前一时刻的动态模型。GPB2除了考虑 k 时刻的模型 r_k 之外,还考虑到 $k-1$ 时刻的模型 r_{k-1} 。GPB2虽然性能更好,但是相比GPB1计算量更大。GPB1假定 $f_{r_k}(\cdot)$ 为目标状态的线性函数;其次,加性噪声为方差为 Q_{r_k} 的零均值高斯白噪声。这些假定条件使得GPB1的状态方程为

$$x_k = F_{r_k} x_{k-1} + u_{r_k} + v_{r_k}$$

观测方程假定为目标状态向量的线性函数

$$y_k = Hx_k + w_k$$

式中: w_k 是方差为 R_k 、均值为零的高斯白噪声。与其他跟踪滤波算法类似,GPB2所要求解的概率密度为 $p(x_k | y^k)$ 。如式(3.9)所示,该概率密度函数可以分解为

$$p(x_k | y^k) = \sum_{i=1}^d p(x_k | r_k = i, y^k) \mu_{k|k}(i)$$

在GPB2中,应用全概率公式,后验概率密度进一步分解为

$$p(x_k | y^k) = \sum_{j=1}^d \sum_{i=1}^d p(x_k, r_k = i, r_{k-1} = j | y^k)$$

应用条件概率密度引理,方程右侧可以进一步展开为

$$p(x_k | y^k) = \sum_{j=1}^d \sum_{i=1}^d p(x_k | r_k = i, r_{k-1} = j, y^k)$$

$$p(r_{k-1} = j | r_k = i, y^k) p(r_k = i | y^k)$$

利用贝叶斯理论,且由 $y^k = (y^{k-1}, y_k)$, 则 $p(x_k | r_k = i, r_{k-1} = j, y^k)$ 等于

$$\frac{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k, r_k = i, r_{k-1} = j, \mathbf{y}^{k-1})}{p(\mathbf{y}_k | r_k = i, r_{k-1} = j, \mathbf{y}^{k-1})} p(\mathbf{x}_k | r_k = i, r_{k-1} = j, \mathbf{y}^{k-1}) \quad (3.37)$$

式中: $p(\mathbf{x}_k | r_k = i, r_{k-1} = j, \mathbf{y}^{k-1})$ 可以看作预测概率密度。

对于第二个分量的最优递推, 合成概率 $\mu_{k-1|k}^j = p(r_{k-1} = j | r_k = i, \mathbf{y}^k)$ 展开为

$$\begin{aligned} \mu_{k-1|k}^j &= p(r_{k-1} = j | r_k = i, \mathbf{y}_k, \mathbf{y}^{k-1}) \\ &= \frac{p(\mathbf{y}_k, r_k = i | r_{k-1} = j, \mathbf{y}^{k-1}) p(r_{k-1} = j | \mathbf{y}^{k-1})}{p(\mathbf{y}_k, r_k = i | \mathbf{y}^{k-1})} \\ &= \frac{p(\mathbf{y}_k, r_k = i | r_{k-1} = j, \mathbf{y}^{k-1}) p(r_k = i | r_{k-1} = j, \mathbf{y}^{k-1}) \mu_{k-1|k-1}(j)}{p(\mathbf{y}_k, r_k = i | \mathbf{y}^{k-1})} \\ &= \frac{p(\mathbf{y}_k | r_k = i, r_{k-1} = j, \mathbf{y}^{k-1}) \Gamma_{ji} \mu_{k-1|k-1}(j)}{p(\mathbf{y}_k, r_k = i | \mathbf{y}^{k-1})} \end{aligned} \quad (3.38)$$

同样, 条件模型概率可以展开为

$$\begin{aligned} \mu_{k|k}(i) &= p(r_k = i | \mathbf{y}^k) = p(r_k = i | \mathbf{y}_k, \mathbf{y}^{k-1}) \\ &= \sum_{j=1}^d p(r_k = i, r_{k-1} = j | \mathbf{y}_k, \mathbf{y}^{k-1}) \\ &= \frac{\sum_{j=1}^d p(\mathbf{y}_k | r_k = i, r_{k-1} = j, \mathbf{y}^{k-1}) p(r_k = i | r_{k-1} = j, \mathbf{y}^{k-1}) p(r_{k-1} = j | \mathbf{y}^{k-1})}{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{y}^{k-1})} \\ &= \frac{\sum_{j=1}^d p(\mathbf{y}_k | r_k = i, r_{k-1} = j, \mathbf{y}^{k-1}) \Gamma_{ji} \mu_{k-1|k-1}(j)}{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{y}^{k-1})} \end{aligned} \quad (3.39)$$

GPB2 的递推形式需要求解式 (3.37) 中的似然函数、式 (3.38) 归一化因数以及式 (3.39) 中的其他分量。

2. 预测概率密度和预测模型概率

式 (3.37) 中的预测概率密度可以由下式计算:

$$p(\mathbf{x}_k | r_k = i, r_{k-1} = j, \mathbf{y}^{k-1}) = \int_{\mathbf{x}_{k-1}} p(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k-1} | r_k = i, r_{k-1} = j, \mathbf{y}^{k-1}) d\mathbf{x}_{k-1}$$

利用条件概率引理, $p(\mathbf{x}_k | r_k = i, r_{k-1} = j, \mathbf{y}^{k-1})$ 可以展开为

$$\int_{\mathbf{x}_{k-1}} p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, r_k = i, r_{k-1} = j, \mathbf{y}^{k-1}) p(\mathbf{x}_{k-1} | r_k = i, r_{k-1} = j, \mathbf{y}^{k-1}) d\mathbf{x}_{k-1}$$

给定 \mathbf{x}_{k-1} 和 r_k , 概率密度 $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, r_k = i, r_{k-1} = j, \mathbf{y}^{k-1})$ 与 r_{k-1} 和 \mathbf{y}^{k-1} 相互独立, 因此

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, r_k = i, r_{k-1} = j, \mathbf{y}^{k-1}) = p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, r_k = i)$$

此外, 由于 \mathbf{x}_{k-1} 与 r_k 是相互独立的, 那么

$$p(\mathbf{x}_{k-1} | r_k = i, r_{k-1} = j, \mathbf{y}^{k-1}) = p(\mathbf{x}_{k-1} | r_{k-1} = j, \mathbf{y}^{k-1})$$

预测概率密度可以简化为

$$p(\mathbf{x}_k | r_k = i, r_{k-1} = j, \mathbf{y}^{k-1}) = \int_{\mathbf{x}_{k-1}} p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, r_k = i) p(\mathbf{x}_{k-1} | r_{k-1} = j, \mathbf{y}^{k-1}) d\mathbf{x}_{k-1}$$

由于 GPB2 与 GPB1 具有相同的系统方程, 转移概率密度同样为

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, r_k = i) &= p_{v_i}(\mathbf{x}_k - \mathbf{F}_i \mathbf{x}_{k-1} - \mathbf{u}_i) \\ &= N(\mathbf{x}_k; \mathbf{F}_i \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{u}_i, \mathbf{Q}_i) \end{aligned}$$

GPB2 近似: 现在将 $p(\mathbf{x}_{k-1} | r_{k-1} = j, \mathbf{y}^{k-1})$ 近似为高斯分布形式:

$$p(\mathbf{x}_{k-1} | r_{k-1} = j, \mathbf{y}^{k-1}) \approx N(\mathbf{x}_{k-1}; \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}^j, \mathbf{P}_{k-1|k-1}^j)$$

则, 可以得到

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_k | r_k = i, r_{k-1} = j, \mathbf{y}^{k-1}) &= \int_{\mathbf{x}_{k-1}} N(\mathbf{x}_k; \mathbf{F}_i \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{u}_i, \mathbf{Q}_i) N(\mathbf{x}_{k-1}; \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}^j, \mathbf{P}_{k-1|k-1}^j) d\mathbf{x}_{k-1} \\ &= N(\mathbf{x}_k; \mathbf{F}_i \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}^j + \mathbf{u}_i, \mathbf{F}_i \mathbf{P}_{k-1|k-1}^j \mathbf{F}_i^T + \mathbf{Q}_i) \\ &= N(\mathbf{x}_k; \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^{ij}, \mathbf{P}_{k|k-1}^{ij}) \end{aligned}$$

预测模型概率为

$$\begin{aligned} p(r_k = i | \mathbf{y}^{k-1}) &= \sum_{j=1}^d p(r_k = i | r_{k-1} = j, \mathbf{y}^{k-1}) p(r_{k-1} = j | \mathbf{y}^{k-1}) \\ &= \sum_{j=1}^d \Gamma_{ji} p(r_{k-1} = j | \mathbf{y}^{k-1}) \\ &= \sum_{j=1}^d \Gamma_{ji} \mu_{k-1|k-1}(j) \end{aligned}$$

3. 似然函数

GPB2 中的似然函数为式(3.37)中的 $p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k, r_k = i, r_{k-1} = j, \mathbf{y}^{k-1})$ 、式(3.38)和式(3.39)的 $p(\mathbf{y}_k | r_k = i, r_{k-1} = j, \mathbf{y}^{k-1})$ 。这些似然函数的计算都需要用到观测信息。给定状态 \mathbf{x}_k 、 \mathbf{y}_k 与其他参数相互独立, 似然函数 $p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k, r_k = i, r_{k-1} = j, \mathbf{y}^{k-1})$ 可以简化为 $p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k)$ 。由观测方程可知 $p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k) = p_{w_k}(\mathbf{y}_k - \mathbf{H}\mathbf{x}_k) = N(\mathbf{y}_k; \mathbf{H}\mathbf{x}_k, \mathbf{R}_k)$ 。第二个似然函数与 $r_{k-1} = j$ 和 $r_k = i$ 有关, 用 $\lambda_k(ij)$ 表示似然函数, 可得

$$\begin{aligned} \lambda_k(ij) &= p(\mathbf{y}_k | r_k = i, r_{k-1} = j, \mathbf{y}^{k-1}) \\ &= \int_{\mathbf{x}_k} p(\mathbf{y}_k, \mathbf{x}_k | r_k = i, r_{k-1} = j, \mathbf{y}^{k-1}) d\mathbf{x}_k \\ &= \int_{\mathbf{x}_k} p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k, r_k = i, r_{k-1} = j, \mathbf{y}^{k-1}) p(\mathbf{x}_k | r_k = i, r_{k-1} = j, \mathbf{y}^{k-1}) d\mathbf{x}_k \\ &= \int_{\mathbf{x}_k} N(\mathbf{y}_k; \mathbf{H}\mathbf{x}_k, \mathbf{R}_k) N(\mathbf{x}_k; \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^{ij}, \mathbf{P}_{k|k-1}^{ij}) d\mathbf{x}_k \end{aligned}$$

上述积分可以简化为单高斯分布的形式, 即 $\lambda_k(ij) = N(\mathbf{y}_k; \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^{ij}, \mathbf{H}\mathbf{P}_{k|k-1}^{ij}\mathbf{H}^T +$

R_k)。

4. 归一化因数

式(3.37)中的归一化因数为 $\lambda_k(ij)$, 在式(3.38)中归一化因数为

$$\begin{aligned}
 p(y_k, r_k = i | y^{k-1}) \\
 &= \sum_{j=1}^d p(y_k, r_k = i, r_{k-1} = j | y^{k-1}) \\
 &= \sum_{j=1}^d p(y_k | r_k = i, r_{k-1} = j, y^{k-1}) p(r_k = i | r_{k-1} = j, y^{k-1}) p(r_{k-1} = j | y^{k-1}) \\
 &= \sum_{j=1}^d \lambda_k(ij) \Gamma_{ji} \mu_{k-1|k-1}(j)
 \end{aligned}$$

在式(3.39)中, 第三个和最后一个归一化因数为

$$\begin{aligned}
 p(y_k | y^{k-1}) &= \sum_{i=1}^d p(y_k, r_k = i | y^{k-1}) \\
 &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d p(y_k, r_k = i, r_{k-1} = j | y^{k-1}) \\
 &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d p(y_k | r_k = i, r_{k-1} = j, y^{k-1}) \times \\
 &\quad p(r_k = i | r_{k-1} = j, y^{k-1}) p(r_{k-1} = j | y^{k-1}) \\
 &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \lambda_k(ij) \Gamma_{ji} \mu_{k-1|k-1}(j)
 \end{aligned}$$

5. 条件概率密度和条件模型概率

将各分量的高斯形式代入式(3.37)可得

$$\begin{aligned}
 p(x_k | r_k = i, r_{k-1} = j, y^k) &= \frac{N(y_k; Hx_k, R_k) N(x_k; \hat{x}_{klk-1}^{ij}, P_{klk-1}^{ij})}{N(y_k; H\hat{x}_{klk-1}^{ij}, HP_{klk-1}^{ij}H^T + R_k)} \\
 &= N(x_k; \hat{x}_{klk}^{ij}, P_{klk}^{ij})
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

其中, 均值和协方差分别为(见附录 A)

$$\hat{x}_{k/k}^{ij} = \hat{x}_{klk-1}^{ij} + P_{klk-1}^{ij} H^T (HP_{klk-1}^{ij} H^T + R_k)^{-1} (y_k - H\hat{x}_{klk-1}^{ij}) \tag{3.41}$$

$$P_{klk}^{ij} = P_{klk-1}^{ij} - P_{klk-1}^{ij} H^T (HP_{klk-1}^{ij} H^T + R_k)^{-1} HP_{klk-1}^{ij} \tag{3.42}$$

将似然函数代入式(3.38)可得合成概率

$$\mu_{k-1|k}^{ji} = \frac{\lambda_k(ij) \Gamma_{ji} \mu_{k-1|k-1}(j)}{\sum_{m=1}^d \lambda_k(im) \Gamma_{mi} \mu_{k-1|k-1}(m)}$$

最后可得模型更新概率为

$$\mu_{k|k}(i) = \frac{\sum_{j=1}^d \lambda_k(ij) \Gamma_{ji} \mu_{k-1|k-1}(j)}{\sum_{l=1}^d \sum_{m=1}^d \lambda_k(lm) \Gamma_{ml} \mu_{k-1|k-1}(m)}$$

6. GPB2 估计

GPB2 算法下的后验概率为高斯和的形式:

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}^k) = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d p(\mathbf{x}_k | r_k = i, r_{k-1} = j, \mathbf{y}^k) \mu_{k-1|k}^{ji}(i) \mu_{k|k}(i) \quad (3.43)$$

对于任意 \$(i, j)\$, \$p(\mathbf{x}_k | r_k = i, r_{k-1} = j, \mathbf{y}^k)\$ 由式 (3.40)、式 (3.41) 和式 (3.42) 确定。式 (3.43) 的第二个求和项可以表示为

$$p(\mathbf{x}_k | r_k = i, \mathbf{y}^k) = \sum_{j=1}^d p(\mathbf{x}_k | r_k = i, r_{k-1} = j, \mathbf{y}^k) \mu_{k-1|k}^{ji}$$

式 (3.43) 的高斯求和形式可以用单高斯分布来近似, 可得

$$[\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^i, \mathbf{P}_{k|k}^i] = \text{GMix}[\{\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{ij}, \mathbf{P}_{k|k}^{ij}, \mu_{k-1|k}^{ji}\}_j] \quad (3.44)$$

将式 (3.44) 代入式 (3.43) 可得

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}^k) = \sum_{i=1}^d p(\mathbf{x}_k | r_k = i, \mathbf{y}^k) \mu_{k|k}(i)$$

上式的高斯和分布同样也可以用单高斯分布近似, 可得

$$[\hat{\mathbf{x}}_{k|k}, \mathbf{P}_{k|k}] = \text{GMix}[\{\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^i, \mathbf{P}_{k|k}^i, \mu_{k|k}(i)\}_i]$$

算法 11 GPB2 算法迭代计算方程

(1) **for** 对于每一个模型 i **do**

(2) **for** 对于每一个模型 j **do**

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^{ij} = \mathbf{F}_i \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}^i + \mathbf{u}_i$$

$$\mathbf{P}_{k|k-1}^{ij} = \mathbf{F}_i \mathbf{P}_{k-1|k-1}^j \mathbf{F}_i^T + \mathbf{Q}_i$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{ij} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^{ij} + \mathbf{P}_{k|k-1}^{ij} \mathbf{H}^T (\mathbf{H} \mathbf{P}_{k|k-1}^{ij} \mathbf{H}^T + \mathbf{R}_k)^{-1} (\mathbf{y}_k - \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^{ij})$$

$$\mathbf{P}_{k|k}^{ij} = \mathbf{P}_{k|k-1}^{ij} - \mathbf{P}_{k|k-1}^{ij} \mathbf{H}^T (\mathbf{H} \mathbf{P}_{k|k-1}^{ij} \mathbf{H}^T + \mathbf{R}_k)^{-1} \mathbf{H} \mathbf{P}_{k|k-1}^{ij}$$

$$\lambda_k(ij) = N(\mathbf{y}_k; \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^{ij}, \mathbf{H} \mathbf{P}_{k|k-1}^{ij} \mathbf{H}^T + \mathbf{R}_k)$$

$$\mu_{k-1|k}^{ij} = \frac{\lambda_k(ij) \Gamma_{ji} \mu_{k-1|k-1}(j)}{\sum_{m=1}^d \lambda_k(im) \Gamma_{mi} \mu_{k-1|k-1}(m)}$$

(3) **end for**

$$\mu_{k|k}(i) = \frac{\sum_{j=1}^d \lambda_k(ij) \Gamma_{ji} \mu_{k-1|k-1}(j)}{\sum_{l=1}^d \sum_{m=1}^d \lambda_k(lm) \Gamma_{ml} \mu_{k-1|k-1}(m)}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^i = \sum_{j=1}^d \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{ij} \mu_{k-1|k}^{ji}$$

$$\mathbf{P}_{k|k}^i = \sum_{j=1}^d \mu_{k-1|k}^{ji} \{ \mathbf{P}_{k|k}^{ij} + [\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{ij} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^i][\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{ij} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^i]^T \}$$

(4) end for

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \sum_{i=1}^d \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^i \mu_{k|k}(i)$$

$$\mathbf{P}_{k|k} = \sum_{i=1}^d \mu_{k|k}(i) \{ \mathbf{P}_{k|k}^i + [\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^i - \hat{\mathbf{x}}_{k|k}][\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^i - \hat{\mathbf{x}}_{k|k}]^T \}$$

3.4 交互作用多模型

交互作用多模型 (IMM^[27,28,29]) 自从被介绍^[9,109,151,15] 以来,取得了巨大的成功。以多模型交互作用为特点的 IMM 在众多领域表现出良好的跟踪性能,如机动目标跟踪、自动航迹形成、空中交通管制、目标识别和数据关联以及其他领域。Bar-shalom 等, 2005^[11] 讨论了 IMM 与最优估计的关系。IMM 的计算量与 GPB1 相当,但是其性能可以比拟 GPB2。GPB2 需要考虑 d^2 个模型状态,其中, d 是模型数。假定目标动态特性包含在以下模型集中:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}_{r_k}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_k) + \mathbf{v}_{r_k}, \quad r_k \in \{1, 2, \dots, d\}$$

r_k 是在状态空间内 $\{1, 2, \dots, d\}$ 满足一致性离散马尔可夫链的随机变量。IMM 是包含 d 个模型的目标状态跟踪算法,与两种广义伪贝叶斯滤波算法相类似,但是采用了不同的近似方法。GPB1 将先验概率密度 $p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{y}^{k-1})$ 近似为高斯分布,这使得 k 时刻的后验概率密度 $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}^k)$ 为高斯混合,这个高斯混合最终由单一高斯近似,因为 $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}^k)$ 还要作为下一时刻的先验概率分布。GPB2 则将以模型为条件的先验分布 $p(\mathbf{x}_{k-1} | r_{k-1} = j, \mathbf{y}^{k-1})$ 近似为高斯分布,这使得 $p(\mathbf{x}_k | r_k = i, \mathbf{y}^k)$ 和 $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}^k)$ 均为高斯混合,两者最后均被近似为单高斯分布。IMM 与 GPB2 类似,也是将 $p(\mathbf{x}_{k-1} | r_{k-1} = j, \mathbf{y}^{k-1})$ 近似为高斯分布,但是它进一步近似为 $\sum_{j=1}^d p(\mathbf{x}_k | r_{k-1} = j, \mathbf{y}^{k-1}) p(r_{k-1} = j | r_k = i, \mathbf{y}^{k-1})$, 这一步使得 IMM 仅仅有 GPB1 相近的计算量,跟踪性能却比拟 GPB2。

3.4.1 IMM 滤波方程

目标状态的后验概率密度 $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}^k)$ 通过对联合概率密度各分量求和得

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}^k) = \sum_{i=1}^d p(\mathbf{x}_k, r_k = i | \mathbf{y}^k)$$

利用条件概率引理,上述方程右侧的联合概率密度可以分解为两项之积,即

$$p(\mathbf{x}_k, r_k = i | \mathbf{y}^k) = p(\mathbf{x}_k | r_k = i, \mathbf{y}^k) p(r_k = i | \mathbf{y}^k)$$

令 $\mu_{k|k}(i) = p(r_k = i | \mathbf{y}^k)$, 后验概率密度可以表示为

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}^k) = \sum_{i=1}^d p(\mathbf{x}_k | r_k = i, \mathbf{y}^k) \mu_{k|k}(i) \quad (3.45)$$

将 \mathbf{y}^k 展开为 $\{\mathbf{y}_k, \mathbf{y}^{k-1}\}$, 利用贝叶斯理论可以得到上述方程右侧求和第一项的递推式:

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_k | r_k = i, \mathbf{y}^k) &= p(\mathbf{x}_k | r_k = i, \mathbf{y}_k, \mathbf{y}^{k-1}) \\ &= \frac{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k, r_k = i, \mathbf{y}^{k-1})}{p(\mathbf{y}_k | r_k = i, \mathbf{y}^{k-1})} p(\mathbf{x}_k | r_k = i, \mathbf{y}^{k-1}) \end{aligned}$$

式中: $p(\mathbf{x}_k | r_k = i, \mathbf{y}^{k-1})$ 为预测概率密度; $p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k, r_k = i, \mathbf{y}^{k-1})$ 为似然函数; $p(\mathbf{y}_k | r_k = i, \mathbf{y}^{k-1})$ 为归一化因子。

式(3.45)的求和分量第二项 $\mu_{k|k}(i) = p(r_k = i | \mathbf{y}^k)$ 也可以通过递推计算。同样将 \mathbf{y}^k 展开为 $\{\mathbf{y}_k, \mathbf{y}^{k-1}\}$, 利用贝叶斯理论可得

$$\mu_{k|k}(i) = p(r_k = i | \mathbf{y}_k, \mathbf{y}^{k-1}) = \frac{p(\mathbf{y}_k | r_k = i, \mathbf{y}^{k-1}) p(r_k = i | \mathbf{y}^{k-1})}{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{y}^{k-1})}$$

令 $p(r_k = i | \mathbf{y}^{k-1}) = \mu_{k|k-1}(i)$, 条件模型概率可表示为

$$\mu_{k|k}(i) = \frac{p(\mathbf{y}_k | r_k = i, \mathbf{y}^{k-1}) \mu_{k|k-1}(i)}{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{y}^{k-1})}$$

式中: $\mu_{k|k-1}(i)$ 为模型预测概率; $p(\mathbf{y}_k | r_k = i, \mathbf{y}^{k-1})$ 为似然函数; $p(\mathbf{y}_k | \mathbf{y}^{k-1})$ 为归一化因子。

1. 预测概率密度和预测模型概率

到此为止,推导过程与 GPB1 一样,但是 IMM 与 GPB2 类似,也是以 $k-1$ 时刻的 r_{k-1} 模型为条件,只是条件的具体形式不同。GPB2 是将 $p(\mathbf{x}_k | r_k = i, \mathbf{y}^k)$ 展开,但是 IMM 是将 $p(\mathbf{x}_k | r_k = i, \mathbf{y}^{k-1})$ 展开:

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_k | r_k = i, \mathbf{y}^{k-1}) &= \sum_{j=1}^d p(\mathbf{x}_k, r_{k-1} = j | r_k = i, \mathbf{y}^{k-1}) \\ &= \sum_{j=1}^d p(\mathbf{x}_k | r_{k-1} = j, r_k = i, \mathbf{y}^{k-1}) p(r_{k-1} = j | r_k = i, \mathbf{y}^{k-1}) \\ &= \sum_{j=1}^d p(\mathbf{x}_k | r_{k-1} = j, r_k = i, \mathbf{y}^{k-1}) \mu_{k-1|k}^{ji} \end{aligned}$$

式中: $\mu_{k-1|k}^{ji} = p(r_{k-1} = j | r_k = i, \mathbf{y}^{k-1})$ 为混合概率(Bar-Shalom 等, 2005^[11])。混合概率与模型转移概率有关:

$$\mu_{k-1|k}^{ji} = p(r_{k-1} = j | r_k = i, \mathbf{y}^{k-1})$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{p(r_k = i | r_{k-1} = j, \mathbf{y}^{k-1}) p(r_{k-1} = j | \mathbf{y}^{k-1})}{p(r_k = i | \mathbf{y}^{k-1})} \\
&= \frac{p(r_k = i | r_{k-1} = j) p(r_{k-1} = j | \mathbf{y}^{k-1})}{\sum_{m=1}^d p(r_k = i | r_{k-1} = m, \mathbf{y}^{k-1}) p(r_{k-1} = m | \mathbf{y}^{k-1})} \\
&= \frac{p(r_k = i | r_{k-1} = j) p(r_{k-1} = j | \mathbf{y}^{k-1})}{\sum_{m=1}^d p(r_k = i | r_{k-1} = m) p(r_{k-1} = m | \mathbf{y}^{k-1})} \\
&= \frac{\Gamma_{ji} \mu_{k-1|k-1}(j)}{\sum_{m=1}^d \Gamma_{mi} \mu_{k-1|k-1}(m)}
\end{aligned}$$

可以看到 $\mu_{k-1|k}^{ji}$ 不同于 GPB2 中的合成概率 $\mu_{k-1|k}^{ji}$, 它不依赖于 \mathbf{y}_k 。给定先验目标状态 \mathbf{x}_{k-1} , 预测概率密度可以扩展为

$$p(\mathbf{x}_k | r_k = i, \mathbf{y}^{k-1}) = \sum_{j=1}^d \int_{\mathbf{x}_{k-1}} p(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k-1} | r_{k-1} = j, r_k = i, \mathbf{y}^{k-1}) \mu_{k-1|k}^{ji} d\mathbf{x}_{k-1}$$

利用条件概率引理, 将积分项内的联合概率密度分布展开, 预测概率密度转换为

$$\begin{aligned}
&p(\mathbf{x}_k | r_k = i, \mathbf{y}^{k-1}) \\
&= \sum_{j=1}^d \int_{\mathbf{x}_{k-1}} p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, r_{k-1} = j, r_k = i, \mathbf{y}^{k-1}) \times \\
&\quad p(\mathbf{x}_{k-1} | r_{k-1} = j, r_k = i, \mathbf{y}^{k-1}) \mu_{k-1|k}^{ji} d\mathbf{x}_{k-1} \\
&= \sum_{j=1}^d \int_{\mathbf{x}_{k-1}} p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, r_k = i, \mathbf{y}^{k-1}) p(\mathbf{x}_{k-1} | r_{k-1} = j, \mathbf{y}^{k-1}) \mu_{k-1|k}^{ji} d\mathbf{x}_{k-1} \\
&= \int_{\mathbf{x}_{k-1}} p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, r_k = i, \mathbf{y}^{k-1}) \sum_{j=1}^d p(\mathbf{x}_{k-1} | r_{k-1} = j, \mathbf{y}^{k-1}) \mu_{k-1|k}^{ji} d\mathbf{x}_{k-1}
\end{aligned}$$

由以上可知, 我们利用了这样一个事实, 即 $k-1$ 时刻的目标状态 \mathbf{x}_{k-1} 与 k 时刻的模型 r_k 无关。积分函数第一项可以看作转移概率密度, 可以由动态方程推导而出:

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, r_k = i, \mathbf{y}^{k-1}) = p_{v_i}(\mathbf{x}_k - \mathbf{F}_i(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_k))$$

其中, $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{r_k=i}$ 且 $\mathbf{F}_i(\cdot) = \mathbf{f}_{r_k=i}(\cdot)$ 。由于 \mathbf{v}_i 是方差为 \mathbf{Q}_i 且零均值的高斯白噪声, 转移概率密度可以表示为

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, r_k = i, \mathbf{y}^{k-1}) = N(\mathbf{x}_k; \mathbf{F}_i \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{u}_i, \mathbf{Q}_i)$$

积分函数的第二项可以近似为高斯分布。

IMM 近似: 将 $p(\mathbf{x}_{k-1} | r_{k-1} = j, \mathbf{y}^{k-1})$ 近似为高斯分布, 那么高斯和

$$\sum_{j=1}^d p(\mathbf{x}_{k-1} | r_{k-1} = j, \mathbf{y}^{k-1}) \mu_{k-1|k}^{ji}$$

也近似为高斯分布。

在 IMM 滤波算法中,假定

$$p(\mathbf{x}_{k-1} | r_{k-1} = j, \mathbf{y}^{k-1}) \approx N(\mathbf{x}_{k-1}; \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}^j, \mathbf{P}_{k-1|k-1}^j)$$

$$\sum_{j=1}^d p(\mathbf{x}_{k-1} | r_{k-1} = j, \mathbf{y}^{k-1}) \mu_{k-1|k}^{ji} \approx N(\mathbf{x}_{k-1}; \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}^{0i}, \mathbf{P}_{k-1|k-1}^{0i})$$

其中

$$[\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}^{0i}, \mathbf{P}_{k-1|k-1}^{0i}] = \text{GMix}[\{\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}^j, \mathbf{P}_{k-1|k-1}^j, \mu_{k-1|k}^{ji}\}_i]$$

那么预测概率密度可以表示为

$$p(\mathbf{x}_k | r_k = i, \mathbf{y}^{k-1}) = \int_{\mathbf{x}_{k-1}} p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, r_k = i, \mathbf{y}^{k-1}) \sum_{j=1}^d p(\mathbf{x}_{k-1} | r_{k-1} = j, \mathbf{y}^{k-1}) \mu_{k-1|k}^{ji} d\mathbf{x}_{k-1}$$

$$= \int_{\mathbf{x}_{k-1}} N(\mathbf{x}_k; \mathbf{F}_i \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{u}_i, \mathbf{Q}_i) N(\mathbf{x}_{k-1}; \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}^{0i}, \mathbf{P}_{k-1|k-1}^{0i}) d\mathbf{x}_{k-1}$$

$$= N(\mathbf{x}_k; \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^i, \mathbf{P}_{k|k-1}^i)$$

其中,均值和协方差分别为

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^i = \mathbf{F}_i \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}^{0i} + \mathbf{u}_i$$

$$\mathbf{P}_{k|k-1}^i = \mathbf{F}_i \mathbf{P}_{k-1|k-1}^{0i} \mathbf{F}_i^T + \mathbf{Q}_i$$

跟 GPB2 中一样,考虑了 r_{k-1} 模型之后,此处 IMM 的推导类似于 GPB1,但是采用了不同的近似方法。这种近似方法使得 IMM 不同于 GPB2,但是计算量与 GPB1 相近。预测模型概率 $\mu_{k|k-1}(i)$ 可以展开为

$$\mu_{k|k-1}(i) = p(r_k = i | \mathbf{y}^{k-1})$$

$$= \sum_{j=1}^d p(r_k = i | r_{k-1} = j, \mathbf{y}^{k-1}) p(r_{k-1} = j | \mathbf{y}^{k-1})$$

$$= \sum_{j=1}^d \Gamma_{ji} p(r_{k-1} = j | \mathbf{y}^{k-1})$$

$$= \sum_{j=1}^d \Gamma_{ji} \mu_{k-1|k-1}(j)$$

这一步骤为 IMM 的混合步,可以表示为

$$\{[\mu_{k|k-1}(i), \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^i, \mathbf{P}_{k|k-1}^i]\}$$

$$= \text{IMM}_{\text{MP}}[\{\mu_{k-1|k-1}(i), \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}^i, \mathbf{P}_{k-1|k-1}^i, \mathbf{F}_i, \mathbf{Q}_i\}_i, \mathbf{\Gamma}]$$

2. 似然函数

第一个似然函数为 $p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k, r_k = i, \mathbf{y}^{k-1})$, 可以通过观测方程的假设条件进行简化。由于给定的 $\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k$ 与 r_k 和 \mathbf{y}^{k-1} 不相关(观测信息的条件独立性),那么似然函数为

$$p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k, r_k = i, \mathbf{y}^{k-1}) = p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k) = N(\mathbf{y}_k; \mathbf{H}\mathbf{x}_k, \mathbf{R}_k)$$

第二个似然函数需要进一步简化

$$\begin{aligned}
 p(y_k | r_k = i, y^{k-1}) &= \int_{x_k} p(y_k, x_k | r_k = i, y^{k-1}) dx_k \\
 &= \int_{x_k} p(y_k | x_k, r_k = i, y^{k-1}) p(x_k | r_k = i, y^{k-1}) dx_k \\
 &= \int_{x_k} N(y_k; Hx_k, R_k) N(x_k; \hat{x}_{k|k-1}^i, P_{k|k-1}^i) dx_k
 \end{aligned}$$

令 $\lambda_k(i) = p(y_k | r_k = i, y^{k-1})$, 则 $\lambda_k(i) = N(y_k; H\hat{x}_{k|k-1}^i, HP_{k|k-1}^i H^T + R_k)$ 。

3. 归一化因数

$p(y_k | r_k = i, y^{k-1})$ 由上面的 $\lambda_k(i)$ 给定。第二个归一化因子可以利用模型预测概率推导出:

$$\begin{aligned}
 p(y_k | y^{k-1}) &= \sum_{i=1}^d p(y_k | r_k = i, y^{k-1}) p(r_k = i | y^{k-1}) \\
 &= \sum_{i=1}^d \lambda_k(i) \sum_{j=1}^d \Gamma_{ji} \mu_{k-1|k-1}(j)
 \end{aligned}$$

4. 条件概率密度和条件模型概率

条件概率密度展开为

$$\begin{aligned}
 p(x_k | r_k = i, y^k) &= \frac{p(y_k | x_k, r_k = i, y^{k-1}) p(x_k | r_k = i, y^{k-1})}{p(y_k | r_k = i, y^{k-1})} \\
 &= \frac{N(y_k; Hx_k, R_k) N(x_k; \hat{x}_{k|k-1}^i, P_{k|k-1}^i)}{N(y_k; H\hat{x}_{k|k-1}^i, HP_{k|k-1}^i H^T + R_k)}
 \end{aligned}$$

条件概率密度可以近似为高斯分布, 即 $p(x_k | r_k = i, y^k) = N(x_k; \hat{x}_{k|k}^i, P_{k|k}^i)$, 其均值和协方差为

$$\hat{x}_{k|k}^i = \hat{x}_{k|k-1}^i + P_{k|k-1}^i H^T (HP_{k|k-1}^i H^T + R_k)^{-1} (y_k - H\hat{x}_{k|k-1}^i)$$

$$P_{k|k}^i = P_{k|k-1}^i - P_{k|k-1}^i H^T (HP_{k|k-1}^i H^T + R_k)^{-1} HP_{k|k-1}^i$$

条件模型概率 $p(r_k = i | y^k)$ 为

$$\mu_{k|k}(i) = \frac{p(y_k | r_k = i, y^{k-1}) p(r_k = i | y^{k-1})}{p(y_k | y^{k-1})}$$

经简化可得

$$\mu_{k|k}(i) = \frac{\lambda_k(i) \sum_{j=1}^d \Gamma_{ji} \mu_{k-1|k-1}(j)}{\sum_{l=1}^d \lambda_k(l) \sum_{m=1}^d \Gamma_{ml} \mu_{k-1|k-1}(m)}$$

5. IMM 估计

后验概率密度为高斯混合:

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}^k) = \sum_{i=1}^d p(\mathbf{x}_k | r_k = i, \mathbf{y}^k) \mu_{k|k}(i)$$

条件均值和协方差由下式给出：

$$[\hat{\mathbf{x}}_{k|k}, \mathbf{P}_{k|k}] = \text{GMix}[\{\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^i, \mathbf{P}_{k|k}^i, \mu_{k|k}(i)\}_i]$$

算法 12 IMM 迭代计算方程

(1) **for** 对于每一个模型 i **do**

- 模型预测概率

$$\mu_{k-1|k}(i) = p(r_k = i | \mathbf{y}^{k-1}) = \sum_{j=1}^d \Gamma_{ji} \mu_{k-1|k-1}(j)$$

- 混合模型概率

$$\mu_{k-1|k}^{ji} = p(r_{k-1} = j | r_k = i, \mathbf{y}^{k-1}) = \frac{\Gamma_{ji} \mu_{k-1|k-1}(j)}{\sum_{m=1}^d \Gamma_{mi} \mu_{k-1|k-1}(m)}$$

- 混合状态和协方差

$$\mathbf{P}_{k-1|k-1}^{0i} = \sum_{j=1}^d \mu_{k-1|k}^{ji} \{ \mathbf{P}_{k-1|k-1}^j + [\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}^j - \mathbf{x}_{k-1|k-1}^{0i}] [\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}^i - \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}^{0i}]^T \}$$

(2) **end for**

(3) **for** 对于每一个模型 i **do**

- 预测目标状态

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^i = \mathbf{F}_i \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}^{0i} + \mathbf{u}_i$$

- 预测协方差

$$\mathbf{P}_{k|k-1}^i = \mathbf{F}_i \mathbf{P}_{k-1|k-1}^{0i} \mathbf{F}_i^T + \mathbf{Q}_i$$

- 状态更新

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^i = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^i + \mathbf{P}_{k|k-1}^i \mathbf{H}^T (\mathbf{H} \mathbf{P}_{k|k-1}^i \mathbf{H}^T + \mathbf{R}_k)^{-1} (\mathbf{y}_k - \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^i)$$

- 协方差更新

$$\mathbf{P}_{k|k}^i = \mathbf{P}_{k|k-1}^i - \mathbf{P}_{k|k-1}^i \mathbf{H}^T (\mathbf{H} \mathbf{P}_{k|k-1}^i \mathbf{H}^T + \mathbf{R}_k)^{-1} \mathbf{H} \mathbf{P}_{k|k-1}^i$$

- 模型似然函数

$$\lambda_k(i) = N(\mathbf{y}_k; \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^i, \mathbf{H} \mathbf{P}_{k|k-1}^i \mathbf{H}^T + \mathbf{R}_k)$$

(4) **end for**

- 条件均值：

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \sum_{i=1}^d \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^i \mu_{k|k}(i)$$

- 条件协方差：

$$\mathbf{P}_{k|k} = \sum_{i=1}^d [\mathbf{P}_{k|k}^i + (\hat{\mathbf{x}}_{k|k} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^i) (\hat{\mathbf{x}}_{k|k} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^i)^T] \mu_{k|k}(i)$$

3.5 基于粒子滤波的机动目标跟踪

粒子滤波在近似机动目标跟踪的后验概率密度中是一种特别有效的方法。除了估计目标状态以外,还要估计目标机动模型,所以要从扩展状态向量 $[\mathbf{x}'_k, r_k]'$ 中采样粒子。假定 $k-1$ 时刻的后验概率密度由粒子 $\mathbf{x}_{k-1}^1, r_{k-1}^1, \dots, \mathbf{x}_{k-1}^n, r_{k-1}^n$ 和权值 $w_{k-1}^1, \dots, w_{k-1}^n$ 近似表示,混合状态转移概率密度为

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_k, r_k = i | r_{k-1} = j, \mathbf{x}_{k-1}) &= p(r_k = i | r_{k-1} = j) p(\mathbf{x}_k | r_k = i, \mathbf{x}_{k-1}) \\ &= \Gamma_{ji} p_{v_i}(\mathbf{x}_k - \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_{k-1})) \end{aligned} \quad (3.46)$$

目标观测由以下概率密度表示:

$$p(y_k | \mathbf{x}_k, r_k = i) = p_{w_i}(y_k - \mathbf{h}_i(\mathbf{x}_k)) \quad (3.47)$$

在 k 时刻,我们希望找到一组带有权值的粒子来近似后验概率密度分布。这可以通过基本粒子滤波算法(算法5)加上对机动模型的采样来实现。本节将介绍怎样用该方法实现机动目标跟踪。

3.5.1 基于自举滤波的机动目标跟踪

假设自举滤波(BF)在没有利用当前观测信息的情况下完成了采样,粒子权值由似然函数决定。机动目标跟踪的重要性密度函数可以写为

$$q(\mathbf{x}_k, r_k = i, t) = w_{k-1}^i \Gamma_{r_{k-1}^i, i} p_{v_i}(\mathbf{x}_k - \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_{k-1}^i)) \quad (3.48)$$

可以从重要性密度函数式(3.48)中采样,其可以分解为以下边缘密度:

$$q(t) = w_{k-1}^i \quad (3.49)$$

$$q(r_k = i | t) = \Gamma_{r_{k-1}^i, i} \quad (3.50)$$

$$q(\mathbf{x}_k | r_k = i, t) = p_{v_i}(\mathbf{x}_k - \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_{k-1}^i)) \quad (3.51)$$

新权值为后验概率密度和重要性密度函数的比值,即 $w_k^i = C p(y_k - \mathbf{h}_{r_{k-1}^i}(\mathbf{x}_k^i))$, C 为归一化因子保证权值求和为1。算法13给出了基于BF的机动目标跟踪算法。因BF算法采样的特殊性,它可以很明显地分为两个阶段:预测和更新。在预测阶段,通过目标状态动态特性采样;在更新阶段,粒子质量由似然函数决定。机动目标跟踪背景下的更新阶段与非机动目标跟踪背景下的更新阶段相同。不同之处在于预测阶段,这是因为机动目标跟踪背景下需要考虑到模型的不确定性。

算法13 机动目标跟踪下的自举粒子滤波迭代方程

- (1) **for** $i = 1, \dots, n$ **do**
- (2) 采样 t^i , $\Pr(t^i = l) = w_{k-1}^l$ 。
- (3) 机动模型采样 r_k^i , $\Pr(r_k^i = j) = \Gamma_{r_{k-1}^i, j}$ 。
- (4) 采样 $\mathbf{v}_k^i \sim p_{v_{r_k^i}}$, 计算目标状态采样 $\mathbf{x}_k^i = \mathbf{f}_{r_k^i}(\mathbf{x}_{k-1}^i) + \mathbf{v}_k^i$ 。

(5) 计算权值 $e_k^i = p_{w_{r_k^i}}(y_k - h_{r_k^i}(x_k^i))$ 。

(6) **end for**

(7) 计算更新权值

$$w_k^i = w_{k-1}^i e_k^i / \sum_{j=1}^n w_{k-1}^j e_k^j, i = 1, \dots, n$$

(8) 计算状态更新

$$\hat{x}_{k|k} = \sum_{i=1}^n w_k^i x_k^i, \hat{r} = \arg \max_{j \in \{1, \dots, d\}} \sum_{\{i: r_k^i = j\}} w_k^i$$

3.5.2 基于辅助自举滤波的机动目标跟踪

基于辅助自举滤波(ABF)的机动目标跟踪滤波重要性密度函数为

$$q(x_k, r_k = i, t) = \xi_k^i \Gamma_{r_{k-1}^i, i} p_{v_i}(x_k - f_i(x_{k-1}^i)) \quad (3.52)$$

式中

$$\xi_k^i = w_{k-1}^i p_{w_{\rho_k^i}}(y_k - h_{\rho_k^i}(\mu_k^i)) / \sum_{s=1}^n w_{k-1}^s p_{w_{\rho_k^s}}(y_k - h_{\rho_k^s}(\mu_k^s)) \quad (3.53)$$

其中, $\Pr(\rho_k^i = j) = \Gamma_{r_{k-1}^i, j}$, $\mu_k^i = f_{\rho_k^i}(x_{k-1}^i) + v_k^i$, $v_k^i \sim p_{v_{\rho_k^i}}$ 。算法 14 给出了基于 ABF 的机动目标跟踪算法。与 BF 类似, 机动目标跟踪背景下的 ABF 与非机动目标跟踪背景下的 ABF 不同之处仅仅在于采样阶段, 前者的目标状态必须以随机选取的机动模型为条件进行采样, 两种背景下的权值更新相同。

算法 14 机动目标跟踪下的辅助自举粒子滤波方程

(1) **for** $i = 1, \dots, n$ **do**

(2) 机动模型采样 ρ_k^i , 且 $\Pr(\rho_k^i = j) = \Gamma_{r_{k-1}^i, j}$ 。

(3) $\tilde{v}_k^i \sim p_{v_{\rho_k^i}}$, 计算 $\mu_k^i = f_{\rho_k^i}(x_{k-1}^i) + \tilde{v}_k^i$ 。

(4) 计算权值更新因子 $a_k^i = p_{w_{\rho_k^i}}(y_k - h_{\rho_k^i}(\mu_k^i))$ 。

(5) **end for**

(6) 计算更新权值

$$\xi_k^i = w_{k-1}^i a_k^i / \sum_{i=1}^n w_{k-1}^i a_k^i, i = 1, \dots, n$$

(7) **for** $i = 1, \dots, n$ **do**

(8) 混合指标重采样 $\Pr(t^i = l) = \xi_k^l$ 。

(9) 机动模型采样 r_k^i , $\Pr(r_k^i = j) = \Gamma_{r_{k-1}^i, j}$ 。

(10) 目标状态重采样 $v_k^i \sim p_{v_k}$, 计算粒子状态 $x_k^i \sim f_{r_k^i}(x_{k-1}^i) + v_k^i$ 。

(11) 计算非归一化权值

$$\tilde{w}_k^i = \frac{p_{w_{r_k^i}}(y_k - h_{r_k^i}(x_k^i))}{p_{w_{\rho_k^i}}(y_k - h_{\rho_k^i}(\mu_k^i))}$$

(12) end for

(13) 归一化权值

$$w_k^i = \tilde{w}_k^i / \sum_{j=1}^n \tilde{w}_k^j$$

(14) 计算目标状态和协方差

$$\hat{x}_{k|k} = \sum_{i=1}^n w_k^i x_k^i, \quad \hat{r} = \operatorname{argmax}_{j \in \{1, \dots, d\}} \sum_{\{i: r_k^i = j\}} w_k^i$$

3.5.3 基于扩展卡尔曼辅助粒子滤波的机动目标跟踪

在推导 EK-APF 过程中假定 $v_i \sim N(0, Q_i)$ 和 $w_i \sim N(0, R_i)$ 。机动目标跟踪背景下的 EK-APF 重要性密度函数为

$$q(x_k, r_k = i, t) = \xi_k^i \hat{p}(r_k = i | r_{k-1}^i = j, x_{k-1}^i, y_{1:k}) \hat{p}(x_k | r_k = i, x_{k-1}^i, y_{1:k}) \quad (3.54)$$

式中

$$\xi_k^i = w_{k-1}^i \hat{p}(y_k | x_{k-1}^i, r_{k-1} = r_{k-1}^i, y_{1:k-1}) / \sum_{i=1}^n w_{k-1}^i \hat{p}(y_k | x_{k-1}^i, r_{k-1} = r_{k-1}^i, y_{1:k-1}) \quad (3.55)$$

式(3.35)中函数的“ $\hat{\cdot}$ ”符号表示概率分布或者观测方程线性化近似后的密度函数, $h_i(x) \approx h(\hat{x}) + H(x - \hat{x})$ 。边缘密度函数为

$$q(t) = \xi_k^i \quad (3.56)$$

$$q(r_k = i | t) = \hat{p}(r_k = i | r_{k-1}^i = j, x_{k-1}^i, y_{1:k}) \quad (3.57)$$

$$q(x_k | r_k = i, t) = \hat{p}(x_k | r_k = i, x_{k-1}^i, y_{1:k}) \quad (3.58)$$

从更新第一阶段权值开始,它可以展开为

$$\begin{aligned} & \hat{p}(y_k | x_{k-1}, r_{k-1} = j, y_{1:k-1}) \\ &= \sum_{i=1}^d \int \hat{p}(y_k, x_k, r_k = i | x_{k-1}, r_{k-1} = j, y_{1:k-1}) dx_k \\ &= \sum_{i=1}^d \Gamma_{j,i} \int N(y_k; h_i(f_i(x_{k-1})) - H_{k,i}(x_k - f_i(x_{k-1}), R_i) N(x_k; f_i(x_{k-1}), Q_i) dx_k \end{aligned} \quad (3.59)$$

其中, $H_{k,i} = [\nabla_x h_i(x)^T |_{x=f_i(x_{k-1})}]'$ 。利用定理 2.1 可得积分为

$$\hat{p}(y_k | x_{k-1}, r_{k-1} = j, y_{1:k-1}) = \sum_{i=1}^d \Gamma_{j,i} N(y_k; \hat{y}_{k,i}, S_{k,i}) \quad (3.60)$$

其中, $\hat{y}_{k,i} = h_i(f_i(x_{k-1}))$, $S_{k,i} = H_{k,i} Q_i H_{k,i}^T + R_i$ 。

利用贝叶斯理论, 机动模型的采样分布为

$$\hat{p}(r_k = i | r_{k-1} = j, x_{k-1}, y_{1:k}) = \frac{\hat{p}(y_k | r_k = i, x_{k-1}, y_{1:k-1}) p(r_k = i | r_{k-1} = j)}{\hat{p}(y_k | r_{k-1} = j, x_{k-1}, y_{1:k})} \quad (3.61)$$

分母为权值更新, 分子为权值更新的一个被加数, 即可得

$$\hat{p}(r_k = i | r_{k-1} = j, x_{k-1}, y_{1:k}) = \frac{\Gamma_{j,i} N(y_k; \hat{y}_{k,i}, S_{k,i})}{\sum_{a=1}^d \Gamma_{j,a} N(y_k; \hat{y}_{k,a}, S_{k,a})} \quad (3.62)$$

式(3.62)与 BF 机动模型的采样分布函数比较有重要意义, BF 中一个特定机动模型的采样概率密度函数由转移概率密度函数给定。EK - APF 利用了当前观测信息, 它通过对每一个机动模型的转移概率密度乘以一个因数来实现; 当前观测来自哪个机动模型, 哪个模型的因数就越大。

利用贝叶斯理论, 目标状态的采样分布可以扩展为

$$\begin{aligned} p(x_k | r_k = i, x_{k-1}, y_{1:k}) &= \frac{\hat{p}(y_k | x_k, r_k = i) p(x_k | r_k = i, x_{k-1})}{p(y_k | r_k = i, x_{k-1}, y_{1:k-1})} \\ &\propto N(y_k; \hat{y}_{k,i} - H_{k,i}(x_k - f_i(x_{k-1})), R_i) N(x_k; f_i(x_{k-1}), Q_i) \end{aligned} \quad (3.63)$$

利用定理 2.1, 可得

$$p(x_k | r_k = i, x_{k-1}, y_{1:k}) = N(x_k; \hat{\mu}_{k,i}, \Sigma_{k,i}) \quad (3.64)$$

式中

$$\hat{\mu}_{k,i} = f_i(x_{k-1}) + k_{k,i}(y_k - \hat{y}_{k,i}) \quad (3.65)$$

$$\Sigma_{k,i} = Q_i - k_{k,i} H_{k,i} Q_i \quad (3.66)$$

其中, $k_{k,i} = Q_i H_{k,i}^T S_{k,i}^{-1}$ 。

至此完成了机动目标跟踪背景下 EK - APF 的边缘采样密度函数的推导。权值为后验概率密度和重要性密度函数的比值, 由重要性密度函数为粒子的似然函数与样本的线性化似然函数的比值给出, 这与非机动目标跟踪背景下的权值计算相同。因为在两种情况下权值更新都要考虑采样阶段线性化近似问题。算法 15 给出了机动目标跟踪背景下的 EK - APF。

算法 15 机动目标跟踪下的扩展卡尔曼辅助粒子滤波

- (1) for $i = 1, \dots, n$ do
- (2) for $j = 1, \dots, d$ do

(3) 计算雅克比矩阵 $H_{k,j}^i = \nabla_{x^T} h_j(x) |_{x=f_j(x_{k-1}^i)}$ 。

(4) 计算

$$x_{k|k-1,j}^i = f_j(x_{k-1}^i), \hat{y}_{k,j}^i = h_j(x_{k|k-1,j}^i)$$

$$S_{k,j}^i = H_{k,j}^i Q_j (H_{k,j}^i)^T + R_{k,j}, K_{k,j}^i = Q_j (H_{k,j}^i)^T (S_{k,j}^i)^{-1}$$

$$\mu_{k,j}^i = x_{k|k-1,j}^i + K_{k,j}^i (y_k - \hat{y}_{k,j}^i), \Sigma_{k,j}^i = Q_j - K_{k,j}^i H_{k,j}^i Q_j$$

(5) 计算机动模式下非归一化采样概率密度

$$\tilde{b}_{k,j}^i = \Gamma_{r_{k-1,j}^i} N(y_k; \hat{y}_{k,j}^i, S_{k,j}^i)$$

(6) end for

(7) 计算权值更新因子 $a_k^i = \sum_{j=1}^d \tilde{b}_{k,j}^i$, 归一化权值 $b_{k,j}^i = \tilde{b}_{k,j}^i / a_k^i$ 。

(8) end for

(9) 计算更新权值

$$\xi_k^i = w_{k-1}^i a_k^i / \sum_{i=1}^n w_{k-1}^i a_k^i$$

(10) for $i = 1, \dots, n$ do

(11) 重采样 $t^i, \Pr(t^i = l) = \xi_k^l$ 。

(12) 机动模型重采样 $\Pr(r_k^i = j) = b_{k,j}^{r_k^i}$ 。

(13) 目标状态重采样 $x_k^i \sim N(\mu_{k,r_k^i}^{t^i}, \Sigma_{k,r_k^i}^{t^i})$ 。

(14) 计算非归一化权值

$$\tilde{w}_k^i = \frac{p_{w_k}(y_k - h(x_k^i))}{p_{w_k}(y_k - \hat{y}_{k,r_k^i}^{t^i} - H_{k,r_k^i}^{t^i}(x_k^i - x_{k|k-1,r_k^i}^{t^i}))}$$

(15) end for

(16) 归一化权值

$$w_k^i = \tilde{w}_k^i / \sum_{j=1}^n \tilde{w}_k^j, i = 1, \dots, n$$

(17) 计算状态估计

$$\hat{x}_{k|k} = \sum_{i=1}^n w_k^i x_k^i$$

3.6 性能界限

利用恰当的性能界限来比较和评价不同的机动目标跟踪算法具有重要意义。非机动跟踪背景下,2.7节介绍了后验克拉美罗限(PCRb)作为均方误差的下限。

PCRB 成立的一个条件是观测值和参数向量的联合概率密度的对数值是二次可微的。在机动目标跟踪背景下,取值离散的机动模型必须加入到被估计的参数向量中,那么联合密度函数的对数值不满足二次可微条件,PCRB 不能直接应用到机动目标跟踪中,必须寻找其他的评价准则。

一种可能性是寻找一种界限准则,不需要联合密度函数的对数值满足二次可微条件。其中一种界限为 Weiss - Winstein 界 (WWB), WWB 的迭代形式由 Rapoport 和 Oshaman (2004^[136]) 提出。这些 PCRB 的替代界限的缺点是计算和推导复杂。WWB 也不例外,它需要大量参数的优化。文献 [136] 中,迭代 WWB 的推导只考虑单一参数集,给出了一个最优下限。虽然 WWB 具有很好的应用前景,但是构造一个有效的、适用的 WWB 还需要大量的工作。WWB 的意义在于它在评价状态向量连续分量的同时为评价机动模型的估计提供了一种可能,下面讨论的其他界限虽然简单,但是却不具有这种良好的特性。

这些复杂界限准则的一个替代方案是将 PCRB 应用于近似的跳变马尔可夫机动模型。最简单的方法是在已知真实机动模型的情况下计算界限,然而这种方法却远远不实用。另一种方法是计算每一个可能模型序列的状态向量中连续分量的 PCRB,然后利用先验概率对这些对应的模型序列加权。为了减小计算量,实际应用当中一般会去掉最不可能的模型序列。在每个时间采样间隔内,这种方法趋向于平均机动产生的影响,而不能获取目标突然机动引起的影响。也许最好的方法是最近提出的最适高斯近似法 (Hernandez 等, 2005^[67])。

3.7 演示实例

利用 2.8 节相同的例子来分析机动目标跟踪算法。在这一场景中,地面目标的角度信息由机载传感器测量得到,如图 2.2 所示。

本节将要介绍的示例与 2.8 节不同的是目标处于机动状态。目标运动轨迹由一组机动转弯组成。利用多模型算法对机动目标跟踪。在 kT 时刻,目标状态向量为 $\mathbf{x}_k = [x_k, \dot{x}_k, y_k, \dot{y}_k, \omega_k]$, 其中, T 为时间采样间隔。 (x_k, y_k) 为笛卡儿坐标系下的目标位置,状态分量上的点符号表示时间上的微分, ω_k 为角速度。机动模型 r_k 决定了目标的运动状态。三种可能的模型由以下给出。

令 $i = 1, 2, 3$, 有

$$p(\mathbf{x}_k | r_k = i, \mathbf{x}_{k-1}) = N(\mathbf{x}_k; \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_{k-1}), \mathbf{Q}_i) \quad (3.67)$$

模型 1 对应匀速运动,转移概率密度和协方差分别为

$$\mathbf{f}_1(\mathbf{x}) = \mathbf{F}_1 \mathbf{x} = \text{diag}(\mathbf{I}_2 \otimes \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, 0) \mathbf{x} \quad (3.68)$$

$$Q_1 = \text{diag}\left(I_2 \otimes q_1 \begin{bmatrix} T^3/3 & T^2/2 \\ T^2/2 & T \end{bmatrix}, 0\right) \quad (3.69)$$

模型 2 和 3 对应机动转弯模型, 状态向量 $\mathbf{x} = [x, \dot{x}, y, \dot{y}, w]$ 转移概率密度和过程噪声协方差矩阵分别为

$$f_i(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 & \sin(\omega T)/\omega & 0 & -(1 - \cos(\omega T))/\omega & 0 \\ 0 & \cos(\omega T) & 0 & -\sin(\omega T) & 0 \\ 0 & (1 - \cos(\omega T))/\omega & 1 & \sin(\omega T)/\omega & 0 \\ 0 & \sin(\omega T) & 0 & \cos(\omega T) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (3.70)$$

$$Q_i = \text{diag}(I_2 \otimes q_i \begin{bmatrix} T^3/3 & T^2/2 \\ T^2/2 & T \end{bmatrix}, b_i T) \quad (3.71)$$

可以发现, 机动转弯模型的转移概率密度函数是非线性的, 这是由于它为转弯角速度的三角函数与状态向量中其他分量的乘积。这两个机动模型可以精确地对目标由匀速运动转换为机动转弯时迅速做出反应, 它通过对模型 2 施加一个大的过程噪声, 对模型 3 施加一个小的过程噪声来实现。模型 2 适用于机动开始阶段, 模型 3 适用于机动已经形成阶段。

本节所要分析的机动场景如图 3.1 所示。目标机动转弯时的转弯速度为 $\pm 5(^{\circ})/\text{s}$ 。

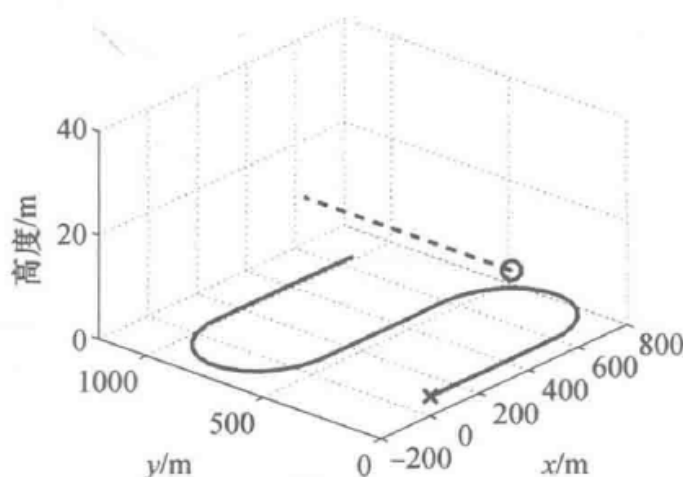


图 3.1 机动目标跟踪算法性能分析仿真场景

图 3.1 中的图形坐标与 2.8 节的场景图相同。这样可以比较机动目标跟踪和非机动目标的跟踪误差。虽然目标航迹是在没有过程噪声的情况下产生的, 但是滤波器中分配了相应的噪声。过程噪声强度在匀速运动时 $q_1 = 1/1000$, 模型 2 模式下 $q_2 = 1/100$, $b_2 = 2 \times 10^{-3}$ 。模型 3 模式下 $q_3 = 1/1000$, $b_3 = 1 \times 10^{-5}$ 。机动模型的转移矩阵为

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0.95 & 0.05 & 0 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0 & 0.2 & 0.8 \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

Γ 的第 (i, j) 个元素为 $p(r_k = i/r_{k-1} = j)$ 。观测之间的时间间隔 $T = 3$, 跟踪时间为 150s, 标准偏差为 1° 。

基于以上假设, 比较 IMM 和 ABF 的跟踪性能, 粒子数分别为 2000 和 5000。利用 UKF 近似 IMM 的每个模型的后验概率密度。对 500 次重复实验计算目标位置最小均方误差, 实验结果如图 3.2 所示。图 3.2 也包含非机动目标跟踪背景下的 PCRB。因为 PCRB 是非机动目标背景下的均方误差下限, 本节讨论的跟踪结果不能达到这个均方误差下限。

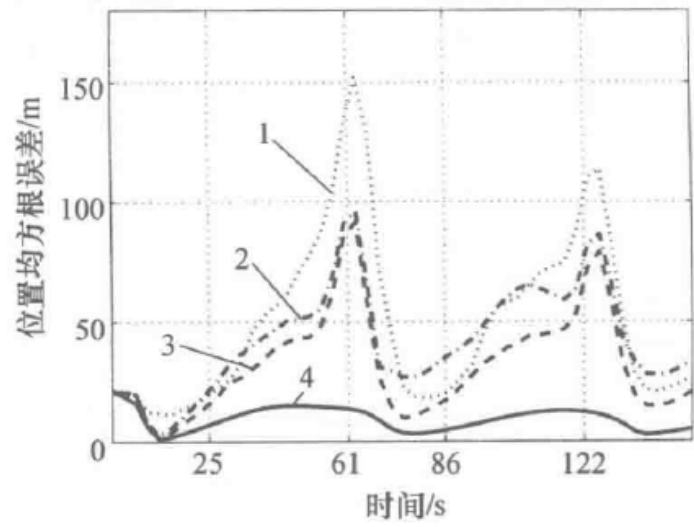


图 3.2 位置均方根误差:IMM(曲线 1)、2000 粒子(曲线 2)、5000 粒子(曲线 3)的 ABF, 非机动目标跟踪的 PCRB(曲线 4)。仿真情况用于机动目标跟踪算法的性能分析

包含 PCRB 的目的是来说明目标机动是如何影响跟踪精度的。由图 3.2 可见, 目标机动严重降低了所有跟踪算法的跟踪性能。受目标机动影响最大的是 IMM, 在机动转弯时, IMM 的 RMS 达到 150m。两种不同粒子数目下的 ABF 的 RMS 均小于 100m。在目标非机动时, IMM 和 ABF 的 RMS 远小于机动转弯时的 RMS。

3.8 小 结

本章在 Chapman - Kolmogorov 贝叶斯框架下介绍了几种机动目标跟踪算法。这些算法主要包括 GPB、IMM、VSMM 以及粒子滤波算法。本章的基础是目标状态的概率密度函数是高斯混合, 不同滤波算法对高斯混合进行了不同的近似。机动目标跟踪、杂波背景下目标跟踪的中心就是对这个高斯混合进行近似和减小这个高斯混合中的高斯分量数, 后续章节将作详细介绍。

第4章 杂波环境下的单目标跟踪

第2章和第3章介绍了理想目标跟踪背景下的状态估计和滤波理论。实际目标跟踪问题中,充满挑战的是传感器观测信息中往往包含虚假目标观测。例如,雷达和声纳的观测不仅包含感兴趣目标的回波,而且还有热噪声、地面反射、云层反射等。这些不需要的观测统称为杂波。在视觉目标跟踪中,通过跟踪可以确定目标数量,然而由阳光产生的阴影、在雪地反射的光或者树叶的移动都可能在图像中产生杂波。

杂波或者虚警的特点是随着时间的变化其数目会随机变化,更甚的是,来自于目标的观测和杂波分布在同一个观测空间且看起来相似。实际当中,目标跟踪十分困难,即使目标在传感器监视范围内,它们可能没被检测到或者说没有出现在观测中。换句话说,来自于目标的观测在每次扫描过程中是以一定的概率被检测出来的。因此,从包含杂波的观测中确定目标的状态是目标跟踪的核心问题,也是本章的重点。很多情况下,观测不确定性对跟踪性能的影响比观测本身噪声误差对跟踪性能的影响大得多,比第2章和第3章的估计问题更难处理。

本章介绍的目标跟踪算法基于以下假设:

(1) 目标:

- ① 在监视区域内只有一个目标,目标的位置是未知的。
- ② 目标的运动模型假定是已知的,且模型之间的转换遵循马尔可夫链。
- ③ 在每次扫描期间,每个目标以概率 p_d 被检测到,每个目标的检测概率可能不同。换句话说,假定目标为点目标,每次扫描每个目标至多产生一个观测。

(2) 杂波:杂波密度是先验已知的,否则从接收的观测中估计。

(3) 观测:

- ① 具有无限分辨率的传感器产生观测。换句话说,每一个观测只有一个源。当一个观测用于更新航迹时,它可能是其中之一:

可能是被跟踪的目标产生的观测;

杂波观测。

- ② 这里考虑的观测是只包含位置信息的观测,其他观测特征,例如幅度、多普勒速度等也可以通过观测特征的先验概率密度直接包含进来(Lerro 和 Bar-Shalom, 1990^[85], 1993^[86]; Musiki 和 Evans, 2008^[120])。

这些假设在实际应用当中不一定全都满足。例如,实际传感器分辨率是有限的,两个靠得很近的观测可能会合并。相反,当传感器分辨率很高时,每个扫描周

期内,一个目标可能产生不止一个观测。但是,本章介绍的这些假设条件一定程度上简化了目标跟踪问题,对大部分目标跟踪算法的推导是有帮助的。因此,当这些假设大部分不符合时,实际目标跟踪应用的效果可能会令人失望(Mušicki 和 Evans, 1995^[116])。

4.1 最优贝叶斯滤波

4.1.1 目标运动模型、传感器观测模型和噪声模型

杂波背景下的目标跟踪中,主要的变化在于传感器观测。目标动态模型与非机动单目标运动模型相同。

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{v}_k \quad (4.1)$$

相反地,每个扫描周期的传感器观测则变成一个观测集合

$$\mathbf{y}_k = \{\mathbf{y}^k(1), \mathbf{y}^k(2), \dots, \mathbf{y}^k(m_k)\}$$

式中: m_k 为在 k 时刻目标的观测数目,且 $m^k = \{m_1, m_2, \dots, m_k\}$ 。目标状态的后验概率密度不仅与目标的观测 $\mathbf{y}^k = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_k)$ 有关,而且与 k 时刻的观测数目 m^k 有关。虽然观测数目信息包含在观测当中,但是显式的描述有利于对问题的理解。

4.1.2 条件概率密度

杂波背景下目标状态的后验概率密度为 $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}^k, m^k)$, 利用贝叶斯准则

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}^k, m^k) &= p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_k, m_k, \mathbf{y}^{k-1}, m^{k-1}) \\ &= \frac{p(\mathbf{y}_k, m_k | \mathbf{x}_k, \mathbf{y}^{k-1}, m^{k-1}) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}^{k-1}, m^{k-1})}{p(\mathbf{y}_k, m_k | \mathbf{y}^{k-1}, m^{k-1})} \end{aligned} \quad (4.2)$$

式中: $p(\mathbf{y}_k, m_k | \mathbf{x}_k, \mathbf{y}^{k-1}, m^{k-1})$ 为似然函数; $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}^{k-1}, m^{k-1})$ 为预测概率密度; $p(\mathbf{y}_k, m_k | \mathbf{y}^{k-1}, m^{k-1})$ 为归一化因数。

4.1.3 最优化估计

1. 预测概率密度

由 CK 方程给出预测概率密度为

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}^{k-1}, m^{k-1}) = \int_{\mathbf{x}_{k-1}} p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{y}^{k-1}, m^{k-1}) d\mathbf{x}_{k-1} \quad (4.3)$$

$$= \int_{\mathbf{x}_{k-1}} p_{\mathbf{v}_k}(\mathbf{x}_k - \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1})) p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{y}^{k-1}, m^{k-1}) d\mathbf{x}_{k-1} \quad (4.4)$$

状态转移概率密度直接由目标动态方程式(4.1)和系统噪声分布推导而来。

2. 似然函数

式(4.2)的第一部分,即联合似然函数可以重写为

$$p(y_k, m_k | x_k, y^{k-1}, m^{k-1}) = p(y_k(1), y_k(2), \dots, y_k(m_k), m_k | x_k, y^{k-1}, m^{k-1}) \quad (4.5)$$

令:

(1) $\theta_k(0)$ 表示 y_k 内没有一个观测是源于目标的关联事件;

(2) $\theta_k(i)$ 表示 y_k 内的第 i 个观测是源于目标, 且其他观测为杂波的关联事件。其中, $i=1, 2, \dots, m(k)$ 。

同时, 在每个采样时刻, 关联事件集 $\{\theta_k(0), \theta_k(1), \dots, \theta_k(m)\}$ 构成了一个互斥且完备的关联事件集。利用全概率公式, 由式(4.5)可得

$$\begin{aligned} p(y_k, m_k | x_k, y^{k-1}, m^{k-1}) &= \sum_{i=0}^{m_k} p(y_k(1), y_k(2), \dots, y_k(m_k), m_k, \theta_k(i) | x_k, y^{k-1}, m^{k-1}) \\ &= \sum_{i=0}^{m_k} p(y_k(1), y_k(2), \dots, y_k(m_k) | x_k, m_k, \theta_k(i), y^{k-1}, m^{k-1}) \times \\ &\quad p(\theta_k(i) | x_k, m_k, y^{k-1}, m^{k-1}) p(m_k | x_k, y^{k-1}, m^{k-1}) \quad (4.6) \end{aligned}$$

在高斯白噪声假设条件下, 式(4.6)的第一部分可以简化为

$$p(y_k(1), y_k(2), \dots, y_k(m_k) | x_k, m_k, \theta_k(i))$$

观测数目 m_k 与目标状态 x_k 相互独立, 因此, 式(4.6)的最后一个分量可以简化为

$$p(m_k | x_k, y^{k-1}, m^{k-1}) = p(m_k | y^{k-1}, m^{k-1})$$

现在考虑式(4.6)中求和函数的中间那个因数, 由于 $\theta_k(i)$ 是 k 时刻第 i 个观测源于目标且其他观测为杂波的关联事件, 因此它只与观测数目 m_k 有关。以上概率依赖于目标状态 x_k 的事实使我们可以只考虑特定的关联事件, 换句话说, 要求第 i 个观测与一个不存在的目标关联是没有意义的。关联事件就是这样一个简单事件: 从一组观测集中选出一个观测值, 标注它是一个源于目标的观测。这样的观测事件是与过去的观测 y^{k-1}, m^{k-1} 不相关的。因此, 可得

$$p(\theta_k(i) | x_k, m_k, y^{k-1}, m^{k-1}) = p(\theta_k(i) | m_k)$$

它与 Bar-Shalom 和 Fortmann(1998^[7]) 提出的 $\gamma_i(m_k)$ 相同。因此, 式(4.6)可以简化为

$$\begin{aligned} p(y_k, m_k | x_k, y^{k-1}, m^{k-1}) &= \sum_{i=0}^{m_k} p(y_k(1), y_k(2), \dots, y_k(m_k) | x_k, m_k, \theta_k(i)) \times \\ &\quad p(\theta_k(i) | m_k) p(m_k | y^{k-1}, m^{k-1}) \quad (4.7) \end{aligned}$$

3. 归一化因数

归一化因数为

$$p(y_k, m_k | y^{k-1}, m^{k-1}) = \int_{x_k} p(y_k, m_k | x_k, y^{k-1}, m^{k-1}) p(x_k | y^{k-1}, m^{k-1}) dx_k \quad (4.8)$$

式中:积分函数的第一项由式(4.7)给出;第二项由式(4.4)给出。

将预测概率密度、似然函数和归一化因数代入式(4.2)可以得到杂波背景下的最优贝叶斯滤波。对这个最优贝叶斯滤波进行近似产生了很多滤波算法,包括最近邻法(NN)、概率数据关联法(PDA)以及粒子滤波。后续章节将介绍这些近似滤波方法。

4.2 最近邻滤波法

最近邻滤波算法基于以下5条假设条件:

- (1) 真实目标是存在的且总能被检测到;
- (2) 距离观测预测最近的观测值来源于目标;
- (3) 其他观测源于杂波;
- (4) 目标运动特性遵循线性高斯统计特性;
- (5) 观测噪声为高斯白噪声。

换句话说,观测 y_k 中,只有统计距离与预测的观测距离最近的那个观测 $y_k(i)$ 被认为是源于目标的观测。

1. 目标运动模型、传感器观测模型和噪声模型

确切地说,NN的假设为:

- (1) 目标状态函数 $f(\cdot)$ 是目标状态的线性函数,满足

$$x_k = Fx_{k-1} + v_k \quad (4.9)$$

- (2) 传感器观测也是目标状态的线性函数,满足

$$y_k = Hx_k + w_k \quad (4.10)$$

- (3) v_k 和 w_k 为不相关的零均值高斯白噪声序列,协方差分别为 R_k 、 Q_k 。

- (4) 目标状态的先验概率密度 $p(x_{k-1} | y^{k-1})$ 是高斯分布的,均值和协方差分别为 $\hat{x}_{k-1|k-1}$ 、 $P_{k-1|k-1}$ 。

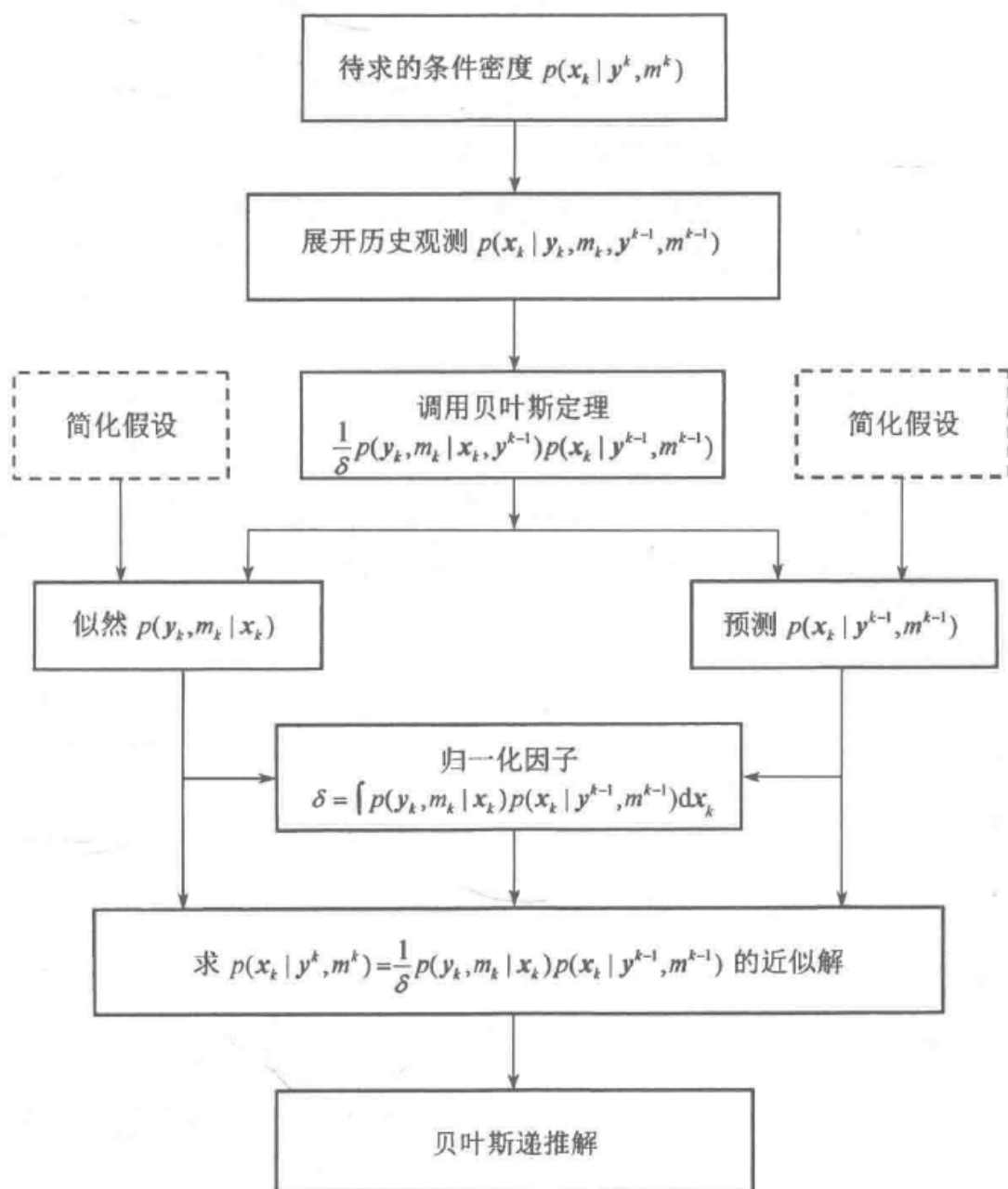
2. 转移概率密度

目标状态满足式(4.9)所示的线性方程。因此, $v_k = x_k - Fx_{k-1}$, 而转移概率密度为

$$p(x_k | x_{k-1}) = p_{v_k}(x_k - Fx_{k-1})$$

因 $p_{v_k}(\cdot)$ 为高斯分布,则转移概率密度可以表示为

$$p(x_k | x_{k-1}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |Q_k|^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x_k - Fx_{k-1})^T Q_k^{-1} (x_k - Fx_{k-1}) \right\}$$



基于递推贝叶斯框架的杂波背景目标跟踪图

它可以表示为简化形式 $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) = N(\mathbf{x}_k; \mathbf{F}\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{Q}_k)$ 。

3. 预测概率密度

预测概率密度由式(4.4)给出:

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}^{k-1}, m^{k-1}) = \int_{\mathbf{x}_{k-1}} p_{v_k}(\mathbf{x}_k - \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1})) p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{y}^{k-1}, m^{k-1}) d\mathbf{x}_{k-1}$$

在线性高斯假设条件下, 积分第一项 $p_{v_k}(\mathbf{x}_k - \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}))$ 为正态分布函数 $N(\mathbf{x}_k; \mathbf{F}\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{Q}_k)$ 。积分函数第二项 $p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{y}^{k-1}, m^{k-1})$ 为前一时刻的先验概率密度, 可以近似为 $N(\mathbf{x}_{k-1}; \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \mathbf{P}_{k-1|k-1})$ 。那么预测概率密度可以简化为

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}^{k-1}, m^{k-1}) = N(\mathbf{x}_k; \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{P}_{k|k-1}) \quad (4.11)$$

其中

$$[\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{P}_{k|k-1}] = \mathbf{KF}_P[\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \mathbf{P}_{k-1|k-1}, \mathbf{F}, \mathbf{Q}]$$

这就是第2章介绍的著名的卡尔曼预测方程。

4. 似然函数

NNF 似然函数通过选取 y_k 中的 $y_k(i)$ 来近似, $y_k(i)$ 的选择依据是对观测与观测预测的统计距离。因为过程噪声和观测噪声是高斯分布的, 可以通过卡方检验函数^[7]确定统计距离。NNF 中, 所有观测中只有一个观测值关联和更新目标航迹, 这个观测的选取基于以下方法:

$$y_k(i) = \arg_{y_k(j)} \min_{j \in \{1, \dots, m_k\}} [y_k(j) - H\hat{x}_{k|k-1}]^T S_{k|k-1}^{-1} [y_k(j) - H\hat{x}_{k|k-1}] \quad (4.12)$$

其中

$$S_{k|k-1} = HP_{k|k-1}H^T + R_k$$

5. 归一化因数

归一化因数为

$$p(y_k, m_k | y^{k-1}, m^{k-1}) = \int_{x_k} p(y_k, m_k | x_k, y^{k-1}, m^{k-1}) p(x_k | y^{k-1}, m^{k-1}) dx_k$$

积分函数第一项为 $N(y_k(i); H\hat{x}_{k|k-1}, R_k)$, 第二项为 $N(x_k; \hat{x}_{k|k-1}, P_{k|k-1})$, 可得

$$p(y_k, m_k | y^{k-1}, m^{k-1}) = N(y_k(i); H\hat{x}_{k|k-1}, S_{k|k-1}) \quad (4.13)$$

6. 条件概率密度

将式(4.12)、式(4.13)代入式(4.2)可得后验概率密度为

$$\begin{aligned} p(x_k | y^k, m^k) &= \frac{N(y_k(i); H\hat{x}_k, R_k) N(x_k; \hat{x}_{k|k-1}, P_{k|k-1})}{N(y_k(i); H\hat{x}_{k|k-1}, S_{k|k-1})} \\ &= N(x_k; \hat{x}_{k|k}, P_{k|k}) \end{aligned}$$

其中

$$[\hat{x}_{k|k}, P_{k|k}] = \text{KF}_E[y_k(i), \hat{x}_{k|k-1}, P_{k|k-1}, H, R]$$

4.2.1 最近邻滤波方程

当杂波密集时, 利用与观测预测统计距离最近的观测值来更新目标航迹性能会变差。这种方法没有恰当地解释这一事实: 用来更新目标航迹的观测可能与目标不相关。它在观测与目标航迹关联时也利用“赢者通吃”的观念, 但是门限内的任何观测都有可能与目标相关。

算法 16 最近邻迭代滤波方程

(1) 预测

$$[\hat{x}_{k|k-1}, P_{k|k-1}] = \text{KF}_P[\hat{x}_{k-1|k-1}, P_{k-1|k-1}, F, Q]$$

(2) 观测选择(见 5.5.2 节, 式(5.78))

$$y_k(i) = \arg_{y_k(j)} \min_{j \in \{1, \dots, m_k\}} [y_k(j) - H\hat{x}_{k|k-1}]^T S_{k|k-1}^{-1} [y_k(j) - H\hat{x}_{k|k-1}]$$

其中, $S_{k|k-1} = HP_{k|k-1}H^T + R_k$ 。

(3) 航迹估计输出

$$[\hat{x}_{k|k}, P_{k|k}] = KF_E[y_k(i), \hat{x}_{k|k-1}, P_{k|k-1}, H, R_k]$$

4.3 概率数据关联滤波

在贝叶斯全邻域滤波器当中最有成效的是概率数据关联算法(PDA)。它利用所有有效观测及其后验概率密度权值来更新目标航迹。PDA 的推导基于以下假设:前一时刻观测的贝叶斯框架下的预测概率密度是高斯分布,虽然严格来说是高斯混合。PDA 近似基于以下 7 条假设:

- (1) 被跟踪目标总是存在的且没有其他目标存在;
- (2) 目标运动模型遵循线性高斯统计特性;
- (3) 感兴趣的目标只能产生一个观测;
- (4) 观测噪声为高斯白噪声;
- (5) 目标以一定的概率 P_D 被检测到;
- (6) 所有非目标产生的观测都来自杂波;杂波空间上服从均匀分布,时间上服从泊松分布;
- (7) 只有落入有效门限内的观测被处理。

1. 转移和预测概率密度

目标动态模型,观测和噪声模型与 4.2 节最近邻算法的模型相同。因此转移和预测概率密度与式(4.11)相同。

2. 似然函数

虽然 NNF 的转移和预测概率密度函数与 PDA 的相同,但它们有一个关键不同之处:从观测回波提取信息的方法不同,即似然函数不同。PDA 中似然函数通过进入门限的观测来近似计算。因为观测噪声和过程噪声是高斯分布的,卡方检验函数确定统计距离并确定接收到的观测是否落入最小超椭圆门内,这个超椭圆与预测观测的概率分布有关。有效门限是一个超椭圆,定义为

$$G = \{y \in \mathbb{R}^n : [y - \hat{y}_{k|k-1}]S(k)^{-1}[y - \hat{y}_{k|k-1}]^T \leq \gamma\}$$

式中: $\sqrt{\gamma}$ 为波门大小; $\hat{y}_{k|k-1}$ 为观测预测值; $S(k)$ 为观测预测协方差矩阵。当观测落入门限以内时成为有效观测。也就是说, y 是有效观测 $\{y_1(1), y_2(2), \dots, y_k(m_k)\}$ 之一。 n 维波门体积为

$$V_k = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2 + 1)} \sqrt{|S(k)|} \gamma^{1/2}$$

$|S(k)|$ 是 $S(k)$ 的行列式。

假定杂波观测在空间上是均匀分布且在门限内具有相同的概率分布,基于此可以推导出 PDA 的似然函数。令 P_G 表示正确观测落入门限的概率,那么似然函数为

$$p(y_k(1), y_k(2), \dots, y_k(m_k) | x_k, m_k, \theta_k(i)) = \left(\frac{1}{V_k}\right)^{m_k-1} p(y_k(i) | x_k) \quad (4.14)$$

$p(y_k(i) | x_k)$ 表示第 i 个观测源于目标的似然函数,当观测空间为观测空间时,它为 $N(y_k(i); Hx_k, R_k)$ 。但是由于有效观测空间是有效波门截断的空间,因此高斯概率密度被截断,积分之后不再等于 1。通过波门概率归一化之后可以认为仍然是观测概率密度函数。因此

$$p(y_k(i) | x_k) = \frac{1}{P_G} N(y_k(i); Hx_k, R_k) \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} p(y_k(1), y_k(2), \dots, y_k(m_k) | x_k, m_k, \theta_k(i)) \\ = \left(\frac{1}{V_k}\right)^{m_k-1} p(y_k(i) | x_k) \\ = \begin{cases} \left(\frac{1}{V_k}\right)^{m_k-1} P_G^{-1} N(y_k(i); Hx_k, R_k) & \forall i \neq 0 \\ \left(\frac{1}{V_k}\right)^{m_k} & i = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.16)$$

式(4.2)的第一部分可以扩展为

$$\begin{aligned} p(y_k, m_k | x_k, y^{k-1}, m^{k-1}) \\ = \sum_{i=0}^{m_k} p(y_k(1), y_k(2), \dots, y_k(m_k) | x_k, m_k, \theta_k(i)) p \\ (\theta_k(i) | m_k) p(m_k | y^{k-1}, m^{k-1}) \\ = \left(\frac{1}{V_k}\right)^{m_k} p(\theta_k(0) | m_k) p(m_k | y^{k-1}, m^{k-1}) + \\ \left(\frac{1}{V_k}\right)^{m_k-1} \sum_{i=1}^{m_k} p(y_k(i) | x_k) p(\theta_k(i) | m_k) p(m_k | y^{k-1}, m^{k-1}) \end{aligned} \quad (4.17)$$

概率分布 $p(\theta_k(i) | m_k)$, $i = 1, \dots, m_k$ 可以通过贝叶斯理论推导出来:令 P_D 表示目标检测概率, P_G 表示源于目标的观测落入波门的概率,由贝叶斯理论可得

$$\begin{aligned} p(\theta_k(0) | m_k) &= \frac{p(m_k | \theta_k(0)) p(\theta_k(0))}{p(m_k)} \\ &= \frac{p(m_k | \theta_k(0)) p(\theta_k(0))}{p(m_k | \theta_k(0)) p(\theta_k(0)) + p(m_k | \text{NOT} \theta_k(0)) p(\text{NOT} \theta_k(0))} \end{aligned}$$

$$= \frac{\mu_F(m_k)(1 - P_G P_D)}{\mu_F(m_k)(1 - P_G P_D) + \mu_F(m_k - 1)P_G P_D}$$

式中:NOTA 表示 A 的互补分量;令 $\mu_F(m_k)$ 表示波门内 m_k 个杂波的概率分布,经重新排列可得

$$p(\theta_k(0) | m_k) = \frac{\mu_F(m_k)(1 - P_G P_D)}{\mu_F(m_k - 1)} \left[P_G P_D + \frac{\mu_F(m_k)}{\mu_F(m_k - 1)}(1 - P_G P_D) \right]^{-1}$$

对于 $i = 1, \dots, m_k$, 假定所有波门内的观测来源于目标的概率相等, 即

$$p(\theta_k(i) | m_k) = \frac{1}{m_k} P_G P_D \left[P_G P_D + \frac{\mu_F(m_k)}{\mu_F(m_k - 1)}(1 - P_G P_D) \right]^{-1}$$

$\mu_F(m_k)$ 最常用的分布是泊松分布和均匀分布, 定义如下:

泊松分布, λV_k 为均值

$$\mu_F(m_k) = \frac{\exp(-\lambda V_k)(\lambda V_k)^{m_k}}{m_k!}$$

均匀分布, $\forall m_k = 0, 1, \dots, N-1$, 非参数杂波

$$\mu_F(m_k) = \frac{1}{N}$$

对于泊松分布, 有

$$p(\theta_k(i) | m_k) = \begin{cases} (1 - P_G P_D) \lambda V_k [m_k P_G P_D + (1 - P_G P_D) \lambda V_k]^{-1} & i = 0 \\ P_G P_D [m_k P_G P_D + (1 - P_G P_D) \lambda V_k]^{-1} & i = 1, 2, \dots, m_k \end{cases}$$

3. 归一化因数

归一化因数 $\delta = p(y_k, m_k | y^{k-1}, m^{k-1})$ 可以表示为

$$\delta = p(y_k, m_k | y^{k-1}, m^{k-1}) = \int_{x_k} p(y_k, m_k | x_k, y^{k-1}, m^{k-1}) p(x_k | y^{k-1}, m^{k-1}) dx_k$$

利用式(4.17)中的结果, 可得

$$\begin{aligned} \delta &= \int_{x_k} p(y_k, m_k | x_k, y^{k-1}, m^{k-1}) p(x_k | y^{k-1}, m^{k-1}) dx_k \\ &= \int_{x_k} p(m_k | y^{k-1}, m^{k-1}) \left[\frac{p(\theta_k(0) | m_k)}{V_k^{m_k}} + \frac{\sum_{i=1}^{m_k} p(y_k(i) | x_k) p(\theta_k(i) | m_k)}{V_k^{m_k-1}} \right] \times \\ &\quad p(x_k | y^{k-1}, m^{k-1}) dx_k \\ &= \int_{x_k} \left[\frac{p(m_k | y^{k-1}, m^{k-1}) p(\theta_k(0) | m_k)}{V_k^{m_k}} + \frac{\sum_{i=1}^{m_k} p(m_k | y^{k-1}, m^{k-1}) p(y_k(i) | x_k) p(\theta_k(i) | m_k)}{V_k^{m_k-1}} \right] \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& N(\mathbf{x}_k; \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{P}_{k|k-1}) d\mathbf{x}_k \\
&= \int_{\mathbf{x}_k} \frac{p(m_k | \mathbf{y}^{k-1}, m^{k-1}) p(\theta_k(0) | m_k) N(\mathbf{x}_k; \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{P}_{k|k-1}) d\mathbf{x}_k}{V_k^{m_k}} + \\
& \quad \int_{\mathbf{x}_k} \frac{\sum_{i=1}^{m_k} p(m_k | \mathbf{y}^{k-1}, m^{k-1}) p(\mathbf{y}_k(i) | \mathbf{x}_k) p(\theta_k(i) | m_k) N(\mathbf{x}_k; \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{P}_{k|k-1}) d\mathbf{x}_k}{V_k^{m_k-1}} \\
&= \frac{p(m_k | \mathbf{y}^{k-1}, m^{k-1}) p(\theta_k(0) | m_k)}{V_k^{m_k}} \int_{\mathbf{x}_k} N(\mathbf{x}_k; \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{P}_{k|k-1}) d\mathbf{x}_k + \\
& \quad \sum_{i=1}^{m_k} \frac{p(m_k | \mathbf{y}^{k-1}, m^{k-1}) p(\theta_k(i) | m_k)}{V_k^{m_k-1}} \int_{\mathbf{x}_k} p(\mathbf{y}_k(i) | \mathbf{x}_k) N(\mathbf{x}_k; \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{P}_{k|k-1}) d\mathbf{x}_k \\
& \text{因 } \int_{\mathbf{x}_k} N(\mathbf{x}_k; \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{P}_{k|k-1}) d\mathbf{x}_k = 1, \text{ 如同式(4.15), 有}
\end{aligned}$$

$$p(\mathbf{y}_k(i) | \mathbf{x}_k) = \frac{1}{P_G} N(\mathbf{y}_k(i); \mathbf{H}\mathbf{x}_k, \mathbf{R}_k)$$

则归一化因数简化为

$$\begin{aligned}
\delta &= \frac{p(m_k | \mathbf{y}^{k-1}, m^{k-1}) p(\theta_k(0) | m_k)}{V_k^{m_k}} + \sum_{i=1}^{m_k} \frac{p(m_k | \mathbf{y}^{k-1}, m^{k-1}) p(\theta_k(i) | m_k)}{P_G V_k^{m_k-1}} \times \\
& \quad \int_{\mathbf{x}_k} N(\mathbf{y}_k(i); \mathbf{H}\mathbf{x}_k, \mathbf{R}_k) N(\mathbf{x}_k; \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{P}_{k|k-1}) d\mathbf{x}_k \\
& \text{积分}
\end{aligned}$$

$$\int_{\mathbf{x}_k} N(\mathbf{y}_k(i); \mathbf{H}\mathbf{x}_k, \mathbf{R}_k) N(\mathbf{x}_k; \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{P}_{k|k-1}) d\mathbf{x}_k = N(\mathbf{y}_k(i); \hat{\mathbf{y}}_k, \mathbf{S}_k)$$

式中: $\hat{\mathbf{y}}_k = \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$, $\mathbf{S}_k = \mathbf{H}\mathbf{P}_{k|k-1}\mathbf{H}^T + \mathbf{R}_k$ 。定义

$$a_0 = \frac{p(m_k | \mathbf{y}^{k-1}, m^{k-1}) p(\theta_k(0) | m_k)}{V_k^{m_k}}$$

$$a_1 = \frac{p(m_k | \mathbf{y}^{k-1}, m^{k-1})}{P_G V_k^{m_k-1} \sqrt{2\pi\mathbf{S}_k}}$$

$$e_i = \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{y}_k(i) - \hat{\mathbf{y}}_k)^T \mathbf{S}_k^{-1}(\mathbf{y}_k(i) - \hat{\mathbf{y}}_k)\right\} p(\theta_k(i) | m_k)$$

归一化因数可以简化为

$$\delta = a_0 + a_1 \sum_{i=1}^{m_k} e_i \quad (4.18)$$

4. 条件概率密度

回到我们讨论的主要问题: 条件概率密度

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}^k, m^k) = \frac{1}{\delta} \sum_{i=0}^{m_k} p(\mathbf{y}_k(1), \mathbf{y}_k(2), \dots, \mathbf{y}_k(m_k), m_k | \mathbf{x}_k, \theta_k(i)) \\ p(\theta_k(i) | m_k) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}^{k-1}, m^{k-1})$$

式中: $\delta = p(\mathbf{y}_k, m_k | \mathbf{y}^{k-1}, m^{k-1})$ 是归一化因数。代入似然函数式(4.17)、预测概率密度式(4.11), 条件概率密度可以重新表示为

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}^k, m^k) = \frac{1}{\delta} \left(\frac{1}{V_k} \right)^{m_k} N(\mathbf{x}_k; \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{P}_{k|k-1}) p(\theta_k(0) | m_k) p(m_k | \mathbf{y}^{k-1}, m^{k-1}) + \\ \frac{1}{\delta} \left(\frac{1}{V_k} \right)^{m_k-1} \sum_{i=1}^{m_k} p(\theta_k(i) | m_k) N(\mathbf{y}_k(i); \hat{\mathbf{y}}_k, \mathbf{S}_k) \times \\ p(m_k | \mathbf{y}^{k-1}, m^{k-1}) N(\mathbf{x}_k; \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^i, \mathbf{P}_{k|k}^i)$$

其中

$$p(\mathbf{y}_k(i) | \mathbf{x}_k) N(\mathbf{x}_k; \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{P}_{k|k-1}) = P_G^{-1} N(\mathbf{y}_k(i); \mathbf{H}\mathbf{x}_k, \mathbf{R}_k) N(\mathbf{x}_k; \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{P}_{k|k-1}) \quad (4.19)$$

可以进一步简化为

$$p(\mathbf{y}_k(i) | \mathbf{x}_k) N(\mathbf{x}_k; \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{P}_{k|k-1}) \\ = P_G^{-1} N(\mathbf{y}_k(i); \hat{\mathbf{y}}_k, \mathbf{S}_k) \frac{N(\mathbf{y}_k(i); \mathbf{H}\mathbf{x}_k, \mathbf{R}_k) N(\mathbf{x}_k; \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{P}_{k|k-1})}{N(\mathbf{y}_k(i); \hat{\mathbf{y}}_k, \mathbf{S}_k)} \\ = P_G^{-1} N(\mathbf{y}_k(i); \hat{\mathbf{y}}_k, \mathbf{S}_k) N(\mathbf{x}_k; \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^i, \mathbf{P}_{k|k}^i)$$

利用附录 A 的高斯分布理论可得

$$[\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^i, \mathbf{P}_{k|k}^i] = \text{KF}_E[\mathbf{y}_k(i), \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{P}_{k|k-1}, \mathbf{H}, \mathbf{R}_k]$$

上式为 PDAF 中利用第 i 个观测 $\mathbf{y}_k(i)$ 的卡尔曼滤波更新, 因此

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}^k, m^k) = \frac{1}{\delta} \left(\frac{1}{V_k} \right)^{m_k} N(\mathbf{x}_k; \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{P}_{k|k-1}) p(\theta_k(0) | m_k) p(m_k | \mathbf{y}^{k-1}, m^{k-1}) + \\ \frac{1}{\delta} \left(\frac{1}{V_k} \right)^{m_k-1} P_G^{-1} \sum_{i=1}^{m_k} p(\mathbf{y}_k(i) | \mathbf{x}_k) N(\mathbf{x}_k; \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{P}_{k|k-1}) p(\theta_k(i) | m_k) \times \\ p(m_k | \mathbf{y}^{k-1}, m^{k-1}) \\ = \beta_k(0) N(\mathbf{x}_k; \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{P}_{k|k-1}) + \sum_{i=1}^{m_k} \beta_k(i) N(\mathbf{x}_k; \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^i, \mathbf{P}_{k|k}^i) \quad (4.20)$$

代入归一化因数可得

$$\beta_k(0) = \frac{1}{\delta} \left(\frac{1}{V_k} \right)^{m_k} p(\theta_k(0) | m_k) p(m_k | \mathbf{y}^{k-1}, m^{k-1}) \\ = \frac{a_0}{a_0 + a_1 \sum_{i=1}^{m_k} e_i} = \frac{b_k}{b_k + \sum_{i=1}^{m_k} e_i}$$

$$\begin{aligned}\beta_k(i) &= \frac{1}{\delta} \left(\frac{1}{V_k} \right)^{m_k-1} P_G^{-1} p(\theta_k(i) | m_k) N(y_k(i); \hat{y}_k, S_k) \\ &= \frac{a_1 e_i}{a_0 + a_1 \sum_{i=1}^{m_k} e_i} = \frac{e_i}{b_k + \sum_{i=1}^{m_k} e_i}\end{aligned}$$

式中

$$\begin{aligned}b_k &= \frac{a_0}{a_1} = p(\theta_k(0) | m_k) \frac{P_G \sqrt{2\pi S_k}}{V_k} \\ e_i &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} (y_k(i) - \hat{y}_k)^T S_k^{-1} (y_k(i) - \hat{y}_k) \right\} p(\theta_k(i) | m_k)\end{aligned}$$

计算数据关联概率,用伪函数表示 $\beta_k(\cdot)$,即

$$[\{\beta_k(i)\}_{i=0}^{m_k}] = \text{STDA}[\{p_k(i)\}_{i=1}^{m_k}]$$

式中: $\beta_k(i)$ 对第 i 个有效观测(落入有效波门内的观测)进行计算。

于是,目标状态的后验概率密度 $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}^k, m^k)$ 为高斯混合形式,均值和方差分别为

$$[\hat{\mathbf{x}}_{k|k}, \mathbf{P}_{k|k}] = \text{GMix}[\{\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^i, \mathbf{P}_{k|k}^i, \beta_k(i)\}_{i=1}^{m_k}]$$

PDAF 概率密度函数计算的伪函数为

$$[\hat{\mathbf{x}}_{k|k}, \mathbf{P}_{k|k}] = \text{PDA}_E[\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{P}_{k|k-1}, \{\mathbf{y}_k(i)\}_{i=1}^{m_k}, \{\beta_k(i)\}_{i=0}^{m_k}, \mathbf{H}, \mathbf{R}]$$

首先计算每一个观测的后验估计均值和方差:

$$[\mathbf{x}_{k|k}(i), \mathbf{P}_{k|k}^i] = \begin{cases} [\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{P}_{k|k-1}] & i = 0 \\ \text{KF}_E[\mathbf{y}_k(i), \mathbf{x}_{k|k-1}, \mathbf{P}_{k|k-1}, \mathbf{H}, \mathbf{R}] & i > 0 \end{cases}$$

然后高斯混合的均值和协方差可以由下式计算得到:

$$[\hat{\mathbf{x}}_{k|k}, \mathbf{P}_{k|k}] = \text{GMix}[\{\hat{\mathbf{x}}_{k|k}(i), \mathbf{P}_{k|k}^i, \beta_k(i)\}_{i=0}^{m_k}]$$

4.3.1 概率数据关联方程

算法 17 PDA 迭代计算方程

(1) 预测

$$[\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{P}_{k|k-1}] = \text{KF}_P[\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \mathbf{P}_{k-1|k-1}, \mathbf{F}, \mathbf{Q}]$$

(2) 观测选择

$$[\mathbf{y}_k, V_k] = \text{MS}_1[\mathbf{Y}_k, \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{P}_{k|k-1}, \mathbf{H}, \mathbf{R}]$$

(3) 所有观测的似然函数

$$[\{p_k(i)\}_i] = \text{ML}_1[\{\mathbf{y}_k(i)\}_i, \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{P}_{k|k-1}, \mathbf{H}, \mathbf{R}]$$

(4) if 无参数跟踪 then

(5) V_k 可以表示为

$$V_k = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2 + 1)} \sqrt{|S(k)|} \gamma^{1/2}$$

其中, $|S(k)|$ 为 $S(k)$ 的行列式。

(6) 杂波观测密度估计

$$\rho = m_k | V_k$$

(7) end if

(8) 单目标数据关联

$$[\{\beta_k(i)\}_{i=0}^{m_k}] = \text{STDA}[\{p_k(i)\}_{i=1}^{m_k}]$$

(9) 状态估计/融合

$$[\hat{\mathbf{x}}_{k|k}, \mathbf{P}_{k|k}] = \text{PDA}_E[\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{P}_{k|k-1}, \{\mathbf{y}_k(i)\}_{i=1}^{m_k}, \{\beta_k(i)\}_{i=0}^{m_k}, \mathbf{H}, \mathbf{R}]$$

(10) 估计输出: 航迹状态均值 $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$ 和协方差 $\mathbf{P}_{k|k}$ 。

4.4 杂波环境下的机动目标跟踪

4.4.1 目标运动方程和传感器观测方程

正如第3章所述, 处理机动目标跟踪问题最好的方法是多模型方法, 目标运动模型为跳变马尔可夫过程。在该方法中, 目标运动特性属于式(3.6)定义的一组模型集:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}_{r_k}(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{v}_{r_k}, \quad r_k \in \{1, 2, \dots, d\}$$

式中: \mathbf{v}_{r_k} 为加性噪声; r_k 为在状态空间内 $\{1, 2, \dots, d\}$ 满足一致性离散马尔可夫链的随机变量。转移概率矩阵为 Γ , 且满足

$$\Gamma_{ji} = \text{Pr}(r_k = i | r_{k-1} = j)$$

假定初始概率 $\text{Pr}(r_0 = i) = \pi_0(i)$ 为已知的。通常假定观测与模型和目标真实状态有关, 观测方程为

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{h}_{r_k}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{w}_{r_k}$$

因其良好的跟踪性能, 本节选择相同的模型处理杂波背景下的机动目标跟踪问题。

4.4.2 杂波环境机动目标跟踪的贝叶斯最优解

由于 r_k 是取值为 $\{1, 2, \dots, d\}$ 的离散变量, 后验概率密度 $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}^k)$ 可以分解为 d 个分量

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}^k) = \sum_{i=1}^d p(\mathbf{x}_k, r_k = i | \mathbf{y}^k), \quad i = \{1, 2, \dots, d\}$$

利用条件概率引理,它可以进一步展开为

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}^k) = \sum_{i=1}^d p(\mathbf{x}_k | r_k = i, \mathbf{y}^k) p(r_k = i | \mathbf{y}^k) \quad (4.21)$$

利用贝叶斯理论和 CK 引理,上述方程的各个分量可以展开为

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_k | r_k = i, \mathbf{y}^k) \\ = \frac{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k, r_k = i, \mathbf{y}^{k-1}) \int_{\mathbf{x}_{k-1}} p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, r_k = i, \mathbf{y}^{k-1}) p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{y}^{k-1}) d\mathbf{x}_{k-1}}{p(\mathbf{y}_k | r_k = i, \mathbf{y}^{k-1})} \end{aligned}$$

定义 $\mu_{k|k}(i) = p(r_k = i | \mathbf{y}^k)$ 以及 $p(r_k = i | \mathbf{y}^{k-1}) = \mu_{k|k-1}(i)$, 可得

$$\mu_{k|k}(i) = \frac{p(\mathbf{y}_k | r_k = i, \mathbf{y}^{k-1}) \mu_{k|k-1}(i)}{\sum_{i=1}^d p(\mathbf{y}_k | r_k = i, \mathbf{y}^{k-1}) \sum_{j=1}^d \Gamma_{ji} \mu_{k-1|k-1}(j)}$$

因我们处理杂波背景下的目标跟踪问题,每次扫描传感器观测为一组观测集 $\mathbf{y}_k = \{y^k(1), y^k(2), \dots, y^k(m_k)\}$, m_k 为观测回波数。

首先做以下定义:

(1) $\theta_k(0)$ 表示 \mathbf{y}_k 内没有一个观测是源于目标的关联事件;

(2) $\theta_k(i)$ 表示 \mathbf{y}_k 内的第 i 个观测是源于目标且其他观测为杂波的关联事件,

其中 $i = 1, 2, \dots, m(k)$ 。

可以得到似然函数

$$\begin{aligned} p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k, r_k = i, \mathbf{y}^{k-1}) &= \sum_{i=0}^{m_k} p(y_k(1), y_k(2), \dots, y_k(m_k) | \mathbf{x}_k, r_k = i, \theta_k(i)) \times \\ &\quad p(\theta_k(i) | \mathbf{x}_k, r_k = i, \mathbf{y}^{k-1}) \end{aligned} \quad (4.22)$$

且

$$\begin{aligned} p(\mathbf{y}_k | r_k = i, \mathbf{y}^{k-1}) &= \int_{\mathbf{x}_k} \sum_{i=0}^{m_k} p(y_k(1), y_k(2), \dots, y_k(m_k) | \mathbf{x}_k, r_k = i, \theta_k(i)) \times \\ &\quad p(\theta_k(i) | \mathbf{x}_k, r_k = i, \mathbf{y}^{k-1}) p(\mathbf{x}_k | r_k = i, \mathbf{y}^{k-1}) d\mathbf{x}_k \end{aligned} \quad (4.23)$$

式(4.23)也是贝叶斯框架下与目标状态条件概率密度有关的归一化因数。

关于模型概率更新方程的归一化因数为

$$\begin{aligned} p(\mathbf{y}_k | \mathbf{y}^{k-1}) &= \sum_{i=1}^d p(\mathbf{y}_k | r_k = i, \mathbf{y}^{k-1}) p(r_k = i | \mathbf{y}^{k-1}) \\ &= \sum_{i=1}^d p(\mathbf{y}_k | r_k = i, \mathbf{y}^{k-1}) \mu_{k|k-1}(i) \\ &= \sum_{i=1}^d p(\mathbf{y}_k | r_k = i, \mathbf{y}^{k-1}) \sum_{j=1}^d \Gamma_{ji} \mu_{k-1|k-1}(j) \end{aligned} \quad (4.24)$$

其中, $p(\mathbf{y}_k | r_k = i, \mathbf{y}^{k-1})$ 由式(4.23)给定。

4.4.3 杂波背景下机动目标跟踪的最优贝叶斯估计

将式(3.10)和式(3.17)代入式(3.9),目标状态后验概率密度 $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}^k)$ 可以确定,则最小均方误差估计和相应协方差矩阵可以表示为

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \int_{\mathbf{x}_k} \mathbf{x}_k p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}^k) d\mathbf{x}_k$$

$$\mathbf{P}_{k|k} = \int_{\mathbf{x}_k} [\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k}] [\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k}]^T p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}^k) d\mathbf{x}_k$$

利用式(3.9),均值和方差可以简化为

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \int_{\mathbf{x}_k} \mathbf{x}_k \sum_{i=1}^d p(\mathbf{x}_k | r_k = i, \mathbf{y}^k) \mu_{k|k}(i) d\mathbf{x}_k$$

$$\mathbf{P}_{k|k} = \int_{\mathbf{x}_k} [\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k}] [\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k}]^T \sum_{i=1}^d p(\mathbf{x}_k | r_k = i, \mathbf{y}^k) \mu_{k|k}(i) d\mathbf{x}_k$$

重新排列积分和求和项,均值和方差可以表示为

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \sum_{i=1}^d \left(\int_{\mathbf{x}_k} \mathbf{x}_k p(\mathbf{x}_k | r_k = i, \mathbf{y}^k) d\mathbf{x}_k \right) \mu_{k|k}(i) \quad (4.25)$$

$$\mathbf{P}_{k|k} = \sum_{i=1}^d \left(\int_{\mathbf{x}_k} [\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k}] [\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k}]^T p(\mathbf{x}_k | r_k = i, \mathbf{y}^k) d\mathbf{x}_k \right) \mu_{k|k}(i) \quad (4.26)$$

许多次优算法,如杂波背景下的 IMMPDA 和粒子滤波算法可以通过近似以上最优贝叶斯方程得到。

4.5 杂波背景下目标跟踪的粒子滤波

本节将 2.6 节的基本粒子滤波算法应用于杂波背景下的单目标跟踪。目标状态的转移概率密度为

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) = p_{v_i}(\mathbf{x}_k - \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1})) \quad (4.27)$$

式中: $p_{v_i}(\cdot)$ 为过程噪声的概率密度分布。

基于关联事件 $\theta_k(i)$, $i \in \{0, \dots, m_k\}$, 观测满足

$$p(\mathbf{y}_k | \theta_k(i), \mathbf{x}_k) = \begin{cases} (1/V_k)^{m_k} & i = 0 \\ (1/V_k)^{m_k-1} p_{w_k}(\mathbf{y}_k(j) - \mathbf{h}(\mathbf{x}_k)) & i = 1, \dots, m_k \end{cases} \quad (4.28)$$

式中: V_k 为波门体积。观测数目 m_k 在波门 V_k 内假定是均值为 λV_k 的泊松分布。

4.5.1 杂波背景下目标跟踪的自举滤波

通过以下重要性密度函数进行粒子采样:

$$q(\mathbf{x}_k, t) = w_{k-1}^t p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}^t) \quad (4.29)$$

边缘重要性密度函数可以表示为

$$q(t) = w_{k-1}^t \quad (4.30)$$

$$q(\mathbf{x}_k | t) = p_{v_k}(\mathbf{x}_k - f(\mathbf{x}_{k-1})) \quad (4.31)$$

样本权值为后验概率密度和重要性密度函数的比值,与似然函数成正比。似然函数可以扩展为

$$p(\mathbf{y}_k | m_k, \mathbf{x}_k) = \sum_{j=0}^{m_k} p(\theta_k(j) | m_k) p(\mathbf{y}_k | \theta_k(j), \mathbf{x}_k) \quad (4.32)$$

代入式(4.28)有

$$p(\theta_k(j) | m_k) = \begin{cases} (1 - P_G P_D) \lambda V_k [m_k P_G P_D + (1 - P_G P_D) \lambda V_k]^{-1} & j = 0 \\ P_G P_D [m_k P_G P_D + (1 - P_G P_D) \lambda V_k]^{-1} & j = 1, 2, \dots, m_k \end{cases} \quad (4.33)$$

可得

$$p(\mathbf{y}_k | m_k, \mathbf{x}_k) \propto 1 - P_G P_D + P_G P_D / \lambda \sum_{j=1}^{m_k} p_{w_k}(\mathbf{y}_k(j) - \mathbf{h}(\mathbf{x}_k)) \quad (4.34)$$

算法 18 给出了杂波背景下的 BF 单目标跟踪递推式。采样步骤与没有杂波时的单目标跟踪相同,这是预料之中的,因为 BF 采样时没有利用当前观测信息。观测不确定性在权值计算中考虑,靠近波门内某观测的粒子将取到较大的权值。

算法 18 杂波背景下自举滤波目标跟踪迭代方程

(1) **for** $i = 1, \dots, n$ **do**

(2) 粒子采样 $\Pr(t^i = l) = w_{k-1}^l$

(3) 采样 $v_k^i \sim p_{v_k}$, 计算目标粒子状态 $\mathbf{x}_k^i = f(\mathbf{x}_{k-1}^{t^i}) + v_k^i$ 。

(4) 计算非归一化权值

$$\tilde{w}_k^i = 1 - P_G P_D + P_G P_D / \lambda \sum_{j=1}^{m_k} p_{w_k}(\mathbf{y}_k(j) - \mathbf{h}(\mathbf{x}_k^i)) \quad (4.35)$$

(5) **end for**

(6) 归一化权值

$$w_k^i = \tilde{w}_k^i / \sum_{j=1}^n \tilde{w}_k^j$$

(7) 计算目标状态

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \sum_{i=1}^n w_{k|k}^i \mathbf{x}_k^i$$

4.5.2 杂波背景下目标跟踪的扩展卡尔曼辅助粒子滤波

在高斯假设条件下推导 EK - APF, $\mathbf{v}_k \sim N(0, \mathbf{Q})$ 和 $\mathbf{w}_k \sim N(0, \mathbf{R})$ 。EK - APF 的重要性密度函数可以表示为

$$q(\mathbf{x}_k, t) = \xi_k^t \hat{p}(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}^t, \mathbf{y}_{1:k}, m_{1:k}) \quad (4.36)$$

其中

$$\xi_k^t = w_{k-1}^t \hat{p}(\mathbf{y}_k, m_k | \mathbf{x}_{k-1}^t, \mathbf{y}_{1:k-1}) / \sum_{i=1}^n w_{k-1}^i \hat{p}(\mathbf{y}_k, m_k | \mathbf{x}_{k-1}^i, \mathbf{y}_{1:k-1}) \quad (4.37)$$

上式概率密度函数的“ $\hat{\cdot}$ ”表示线性化观测方程后得到的概率分布或概率密度函数, $\hat{\mathbf{h}}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}) + \mathbf{H}_k(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})$, 其中, $\mathbf{H}_k = [\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x})^T]^T|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}}$ 。第一阶段权值更新 $\hat{p}(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_{k-1}^t, \mathbf{y}_{1:k-1})$ 可以扩展为

$$\hat{p}(\mathbf{y}_k, m_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{y}_{1:k-1}) = \int \hat{p}(\mathbf{y}_k, m_k | \mathbf{x}_k) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}^t) d\mathbf{x}_k \quad (4.38)$$

将转移概率密度式(4.27)和似然函数式(4.34), 观测方程由线性化近似代替并利用高斯假设条件, 可得

$$\begin{aligned} \hat{p}(\mathbf{y}_k, m_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{y}_{1:k-1}) &\propto \int [1 - P_G P_D + P_G P_D / \lambda \sum_{j=1}^{m_k} N(\mathbf{y}_k(j); \hat{\mathbf{h}}(\mathbf{x}_k, \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1})), \mathbf{R})] \times \\ &\quad N(\mathbf{x}_k; \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}), \mathbf{Q}) d\mathbf{x}_k \end{aligned} \quad (4.39)$$

$$= \sum_{j=1}^{m_k} \tilde{\alpha}_k(j) \quad (4.40)$$

式中

$$\tilde{\alpha}_k(j) = \begin{cases} 1 - P_G P_D & j = 0 \\ P_G P_D N(\mathbf{y}_k(j); \hat{\mathbf{y}}_k, \mathbf{S}_k) / \lambda & j = 1, \dots, m_k \end{cases} \quad (4.41)$$

$\hat{\mathbf{y}}_k = \mathbf{h}(\mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}))$ 且 $\mathbf{S}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{Q} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}$ 。式(4.40)由定理 2.1 获得。状态向量的采样密度函数为

$$\hat{p}(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{y}_{1:k}, m_{1:k}) \propto \hat{p}(\mathbf{y}_k, m_k | \mathbf{x}_k) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) \quad (4.42)$$

推导第一阶段权值的相同过程可以用于计算采样概率密度:

$$\hat{p}(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{y}_{1:k}, m_{1:k}) = \sum_{j=0}^{m_k} \alpha_k(j) N(\mathbf{x}_k; \boldsymbol{\mu}_k(j), \boldsymbol{\Sigma}_k(j)) \quad (4.43)$$

其中

$$\alpha_k(j) = \tilde{\alpha}_k(j) / \sum_{i=0}^{m_k} \tilde{\alpha}_k(i) \quad (4.44)$$

$$\mu_k(j) = \begin{cases} f(x_{k-1}) & j = 0 \\ f(x_{k-1}) + K_k(y_k(j) - \hat{y}_k) & j = 1, \dots, m_k \end{cases} \quad (4.45)$$

$$\Sigma_k(j) = \begin{cases} Q & j = 0 \\ Q - K_k H_k Q & j = 1, \dots, m_k \end{cases} \quad (4.46)$$

式中: $K_k = Q H_k S_k^{-1}$ 。由式(4.40)可见,根据权值产生的采样相当于选取了预测观测至少靠近某一个预选观测的样本。状态向量的采样密度则为混合密度,每个分量相当于一个关联假设。目标状态每个样本的采样过程包括:根据概率 $\alpha_k(0)$, $\dots, \alpha_k(m_k)$ 选择一个关联假设,然后从对应分量的分布采样。对应关联事件 $\theta_k(j)$, $j > 0$ 的采样概率密度为在没杂波时 假定第 j 个观测源于目标的 EK-APF 采样密度。关联事件 $\theta_k(0)$ 对应的采样密度是状态转移密度函数,因这个关联事件是假定所有观测均源于杂波。EK-APF 的递推形式如算法 19 所示。

算法 19 杂波背景下目标跟踪的扩展卡尔曼辅助粒子滤波

(1) **for** $i = 1, \dots, n$ **do**

(2) 计算雅克比矩阵 $H_k^i = \nabla_{x^T} h(x) |_{x = f(x_{k-1}^i)}$ 。

(3) 计算

$$x_{k|k-1}^i = f(x_{k-1}^i), \quad \hat{y}_k^i = h(x_{k|k-1}^i)$$

$$S_k^i = H_k^i Q (H_k^i)^T + R, \quad K_{ki}^i = Q (H_k^i)^T (S_k^i)^{-1}$$

(4) 对于 $j = 0, \dots, m_k$, 利用式(4.41)计算 $\tilde{\alpha}_k^i(j)$ 。

(5) 计算一阶权值更新

$$\alpha_k^i = \sum_{j=0}^{m_k} \tilde{\alpha}_k^i(j)$$

(6) 对于 $j = 0, \dots, m_k$, 计算关联概率

$$\alpha_k^i(j) = \tilde{\alpha}_k^i(j) / \alpha_k^i$$

(7) **end for**

(8) 一阶权值更新

$$\xi_k^t = w_{k-1}^t a_k^t / \sum_{i=1}^n w_{k-1}^t a_k^i, \quad t = 1, \dots, n$$

(9) **for** $i = 1, \dots, n$ **do**

(10) 采样 t^i , 使 $\Pr(t^i = l) = \xi_k^l$ 。

(11) 对于关联假设 j^i , 使 $\Pr(j^i = l) = a_k^{t^i}(l)$ 。

(12) 利用式(4.45)和式(4.46)计算 $\mu_k^{t^i}(j^i)$ 和 $\Sigma_k^{t^i}(j^i)$ 。

(13) 状态采样 $x_k^i \sim N(\mu_k^{t^i}(j^i), \Sigma_k^{t^i}(j^i))$ 。

(14) 计算非归一化权值

$$\tilde{w}_k^i = \frac{1 - P_G P_D + P_G P_D / \lambda \sum_{j=1}^{m_k} N(y_k(j); h(x_k^i), R)}{1 - P_G P_D + P_G P_D / \lambda \sum_{j=1}^{m_k} N(y_k(j); \hat{h}(x_k^i, f(x_{k-1}^i)), R)}$$

(15) end for

(16) 归一化权值

$$w_k^i = \tilde{w}_k^i / \sum_{j=1}^n \tilde{w}_k^j$$

(17) 计算目标状态

$$\hat{x}_{klk} = \sum_{i=1}^n w_{klk}^i x_k^i$$

4.6 性能界限

本章介绍的次优目标跟踪算法的性能可以通过与 PCRB 的比较来分析。PCRB 是参数估计的均方误差下限 (Van Trees, 1968^[156])。因此, 基于观测 y^k 的目标状态 x_k 的估计 \hat{x}_{klk} , 它的最小均方误差估计满足

$$\text{mse}(\hat{x}_{klk}) \geq J_k(x_k)^{-1} \quad (4.47)$$

其中, 信息矩阵 $J(x_k)$ 可以由下式计算:

$$J_k(x_k) = W_k - V_k^T [J_{k-1}(x_{k-1}) + U_k]^{-1} V_k \quad (4.48)$$

式中

$$U_k = -E[\nabla_{x_{k-1}} \nabla_{x_{k-1}}^T \ln p(x_k | x_{k-1})] \quad (4.49)$$

$$V_k = -E[\nabla_{x_{k-1}} \nabla_{x_k}^T \ln p(x_k | x_{k-1})] \quad (4.50)$$

$$W_k = -E[\nabla_{x_k} \nabla_{x_k}^T \ln p(x_k | x_{k-1})] - E[\nabla_{x_k} \nabla_{x_k}^T \ln p(y_k | x_k)] \quad (4.51)$$

从式(4.49)~式(4.51)可见, 只有矩阵 W_k 与当前观测 y_k 有关, 因此 W_k 会受观测不确定性的影响。我们着重研究矩阵 W_k , 尤其是式(4.51)的第二项, 记为

$$Z_k = E[\nabla_{x_k} \nabla_{x_k}^T \ln p(y_k | x_k)] \quad (4.52)$$

杂波背景下目标跟踪的一个重要特性是, 我们不能提前知道将接收到多少观测, 因此, 式(4.52)的期望操作必须对当前状态 x_k 、当前观测 y_k 和观测数 m_k 进行。这里记 (Hernandez 等, 2005^[67]; Mušicki 等, 2005^[121])

$$Z_k = \sum_{m_k=0}^{\infty} P(m_k) \overline{Z_{k, m_k}} \quad (4.53)$$

其中

$$\mathbf{Z}_{k,m_k} = E[\nabla_{\mathbf{x}_k} \nabla_{\mathbf{x}_k}^T \ln p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k, m_k)] \quad (4.54)$$

计算 PCRB 需要计算观测数 m_k 的概率分布函数 $P(m_k)$ 和接收到 m_k 个观测时的信息增量 \mathbf{Z}_{k,m_k} 。假定目标在体积为 V 的监视区域 S 内运动。所有观测为相互独立的随机变量。源于目标状态 \mathbf{x} 的观测 \mathbf{y} 满足

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{e}$$

其中, $\mathbf{e} \sim N(0, \mathbf{R})$ 。通常假定杂波在监视区域内是均匀分布的, 观测数量为均值为 λV 的泊松分布。

首先考虑观测数量的概率分布, 产生 m_k 个观测的可能事件有两个: m_k 个观测全部源于杂波; $m_k - 1$ 个观测源于杂波且一个观测源于目标。因此

$$p(m_k) = \frac{(\lambda V)^{m_k} \exp(-\lambda V)}{m_k!} [1 - P_D + m_k P_D / (\lambda V)] \quad (4.55)$$

观测的条件概率密度也必须考虑 m_k 个观测的这两种构成情况。令 $\tau(m_k)$ 为 m_k 个观测中有一个是源于目标的概率, 从式(4.55)可见

$$\tau(m_k) = m_k P_D / [\lambda V(1 - P_D) + m_k P_D] \quad (4.56)$$

于是, 接收到 m_k 个观测的条件概率密度为

$$p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k, m_k) = [1 - \tau(m_k)] / V^{m_k} + \frac{\tau(m_k)}{m_k V^{m_k-1}} \sum_{j=1}^{m_k} N(\mathbf{y}_{k,j}; \mathbf{h}(\mathbf{x}_k), \mathbf{R}) \quad (4.57)$$

观测概率密度对应于目标状态的梯度为

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{x}_k} \ln p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k, m_k) &= \frac{\tau(m_k) V / m_k \mathbf{H}(\mathbf{x}_k)^T \mathbf{R}^{-1} \sum_{j=1}^{m_k} [\mathbf{y}_{k,j} - \mathbf{h}(\mathbf{x}_k)] N(\mathbf{y}_{k,j}; \mathbf{h}(\mathbf{x}_k), \mathbf{R})}{1 - \tau(m_k) + \tau(m_k) V / m_k \sum_{i=1}^{m_k} N(\mathbf{y}_{k,i}; \mathbf{h}(\mathbf{x}_k), \mathbf{R})} \\ &= \mathbf{B}(\mathbf{y}_k, \mathbf{x}_k, m_k) \sum_{j=1}^{m_k} \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{y}_{k,j}, \mathbf{x}_k) \end{aligned} \quad (4.58)$$

其中

$$\mathbf{B}(\mathbf{y}, \mathbf{x}, m) = \frac{\tau(m) V / m \mathbf{H}(\mathbf{x})^T \mathbf{R}^{-1}}{1 - \tau(m) + \tau(m) V / m \sum_{j=1}^m N(\mathbf{y}_j; \mathbf{h}(\mathbf{x}), \mathbf{R})} \quad (4.59)$$

$$\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = [\mathbf{y} - \mathbf{h}(\mathbf{x})] N(\mathbf{y}; \mathbf{h}(\mathbf{x}), \mathbf{R}) \quad (4.60)$$

式中, $\mathbf{H}(\mathbf{x}_k) = [\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x})^T |_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_k}]^T$, 则

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{k,m_k} &= -E[\nabla_{\mathbf{x}_k} \ln p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k, m_k) \nabla_{\mathbf{x}_k}^T \ln p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k, m_k)] \\ &= E[E[C(\mathbf{y}_k, \mathbf{x}_k, m_k) | \mathbf{x}_k, m_k]] \end{aligned} \quad (4.61)$$

其中

$$\mathbf{C}(\mathbf{y}, \mathbf{x}, m) = \mathbf{B}(\mathbf{y}, \mathbf{x}, m) \sum_{j_1=1}^m \sum_{j_2=1}^m \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{y}_{j_1}, \mathbf{x}) \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{y}_{j_2}, \mathbf{x})^T \mathbf{B}(\mathbf{y}, \mathbf{x}, m)^T \quad (4.62)$$

式(4.61)的最外面的期望是针对目标状态的期望,里面的期望是以目标状态为条件针对观测的期望。最里面的期望可以表示为

$$E[C(y, x, m) | x, m] = [\tau(m)/m]^2 / V^{m-2} H(x)^T R^{-1} \sum_{j_1=1}^m \sum_{j_2=1}^m A_{j_1, j_2}(m) R^{-1} H(x) \quad (4.63)$$

其中

$$A_{j_1, j_2}(m, x) = \int_{S^m} \frac{[y_{j_1} - h(x)][y_{j_2} - h(x)]^T N(y_{j_1}; h(x), R) N(y_{j_2}; h(x), R)}{a(m) + b(m) \sum_{i=1}^m N(y_i; h(x), R)} dy_1 \cdots dy_m \quad (4.64)$$

式中: $a(m) = 1 - \tau(m)$; $b(m) = \tau(m)V/m$ 。式(4.64)不能直接计算得到,但是可以近似计算,例如蒙特卡罗方法。在近似计算之前先要简化积分,记 $z = G^{-1}[y - h(x)]$, 其中, G 是观测噪声协方差矩阵的方根,即 $R = GG^T$ 。应用波门技术,积分区域简化为

$$\{z = [z_1, \cdots, z_n]^T; |z_i| < g, i = 1, \cdots, n\} \quad (4.65)$$

其中, g 决定了波门的大小。利用波门技术之后,监视区域体积 V 应由波门体积 $|G|(2g)^n$ 代替,则对于 $j_1, j_2 = 1, \cdots, m$ 有

$$A_{j_1, j_2}(m) = |G|^{m-2} \int_{[-g, g]^{nm}} \frac{Gz_{j_1} z_{j_2}^T G^T N(z_{j_1}; 0, I) N(z_{j_2}; 0, I)}{a(m) + b(m)/|G| \sum_{i=1}^m N(z_i; 0, I)} dz_1 \cdots dz_m \quad (4.66)$$

式(4.66)在对称积分区域的积分函数为奇函数,因此,当 $j_1 \neq j_2$ 时, $A_{j_1, j_2} = 0$ 。同时,在式(4.63)中,只需考虑 $j_1 = j_2 = j$ 的情况即可,则

$$A_{j, j}(m) = |G|^{m-2} G D(m) G^T \quad (4.67)$$

式中

$$D(m) = \int_{[-g, g]^{nm}} \frac{z_1 z_1^T N(z_1; 0, I)^2}{a(m) + b(m)/|G| \sum_{i=1}^m N(z_i; 0, I)} dz_1 \cdots dz_m \quad (4.68)$$

积分区域的对称性表明仅仅 D 对角线上的元素不为零,因此

$$D(m) = \kappa(m) I \quad (4.69)$$

式中

$$\kappa(m) = \int_{[-g, g]^{nm}} \frac{z_k(1)^2 N(z_k; 0, I)^2}{a(m) + b(m)/|G| \sum_{i=1}^m N(z_i; 0, I)} dz_1 \cdots dz_m \quad (4.70)$$

将式(4.69)代入式(4.67)并把结果代入式(4.63)可得

$$E[C(y, \mathbf{x}, m) | \mathbf{x}, m] = [\tau(m) V / m]^2 m |G|^{m-2} \kappa(m) \mathbf{H}(\mathbf{x})^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}(\mathbf{x}) \quad (4.71)$$

$$\mathbf{Z}_k = v_k E[\mathbf{H}(\mathbf{x})^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}(\mathbf{x})] \quad (4.72)$$

式中

$$v_k = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{P(m) \tau(m)^2 |G|^{m-2} \kappa(m)}{m V^{m-2}} \quad (4.73)$$

在没有杂波的理想检测情况下, $E[\mathbf{H}(\mathbf{x})^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}(\mathbf{x})]$ 为当前观测对信息矩阵的贡献。式(4.72)表明:杂波和漏检对 PCRB 的影响是观测的贡献与系数 v_k (式(4.73))的乘积。这个系数称为信息损减因子(IRF)(Mušicki 等, 2005b^[133])。

这里介绍的界限并不是杂波背景下目标跟踪中最贴切的界限,观测序列条件法(Hernandez 等, 2006^[65])和观测存在条件法(MSC)^[110]是更为贴切的界限。因 IRF 的结构优势,本章采用 IRF。经验主义证据^[26]表明,IRF 与 MSC 等最贴切界限的区别会随着观测的获得而减小。

需要注意的是,估计精度并不是杂波背景下目标跟踪唯一的衡量准则。当杂波密度足够大时,任何算法都不可能实现高精度跟踪。这种情况下, MSE 并不是一种有效的性能准则,这时考虑一个算法仍处于“跟踪”状态的概率更为合适。这意味着这个算法仍然进行目标状态估计,在某些情况下这个状态估计接近真实状态。本章不考虑这种情况下界限准则的性能。

4.7 演示实例

本节利用第2章介绍的目标跟踪的例子以及图2.2来评估本章介绍的几个杂波背景下目标跟踪算法。在本例中,利用机载传感器跟踪感兴趣的目标,传感器观测目标的方位角和俯仰角。因杂波观测的存在以及目标被漏检的情况使跟踪变得复杂。

图2.3标注了目标和传感器的运动轨迹,目标检测概率为 $P_d = 0.8$ 。目标观测噪声为加性噪声,其协方差矩阵 $\mathbf{R} = (\pi/360)^2 \mathbf{I}_2$ 。在不同杂波密度下分别进行了仿真实验,特别地,我们考察 $\lambda = 5$ 点/rad²、25 点/rad² 和 100 点/rad² 三种情况,这些杂波密度值分别对应杂波较少、杂波较多、杂波密集的情况。

本节研究的算法包括 NNF、PDAF 和 EK-APF。NNF 和 PDAF 中的状态估计采用 UKF。EK-APF 的采样粒子数为 5000。正如以上讨论, MSE 并不是杂波背景下目标跟踪的唯一有效的性能度量准则,分析算法在恶劣环境下的跟踪可靠性也是十分必要的。我们同时考虑航迹丢失概率,航迹丢失定义为在 10 次连续扫描中,算法的状态估计误差超过 PCRB 的某个幅度量级。MSE 仅对没有跟踪损失的实验进行平均计算。在每一个固定的杂波密度下,仿真实验进行 1000 次。

表 4.1 和表 4.2 给出了时间平均位置误差的 RMS 和航迹丢失百分比。EK - APF 的跟踪性能优于 PDAF, PDAF 远远好于 NNF。它们跟踪性能的差别主要体现在航迹丢失百分比而不是 RMS。实验结果表明, PF 算法能精确地近似多模型后验概率密度, 这对于 PDAF 和 NNF 等高斯近似的算法来说是件难度很大的事。即使在杂波密度很低的情况下, PCRB 也不能对 MSE 给出很好的说明。杂波密度从 5 点/ rad^2 增大到杂波密度非常高的 100 点/ rad^2 , PCRB 也只产生了一点变化。当考虑在传感器管理应用中使用 PCRB 时应当注意以上现象。

表 4.1 杂波环境单目标跟踪时间平均位置 RMS 误差

杂波密度/(点/ rad^2)	NNF	PDAF	EK - APF	PCRB
5	16.2	17.1	13.3	7.3
25	20.3	22.6	17.0	7.4
100	25.7	29.8	25.5	7.7

表 4.2 杂波环境单目标跟踪航迹丢失概率

杂波密度(点/ rad^2)	NNF	PDAF	EK - APF
5	0.232	0.075	0.027
25	0.518	0.188	0.070
100	0.846	0.661	0.165

4.8 本章小结

本章讨论了杂波背景下单目标跟踪问题, 杂波背景下目标跟踪的最主要问题是杂波来源的不确定性。在最优贝叶斯法中, 通过列举和评估所有可能的观测关联假设来解决观测不确定性问题, 实际应用中, 由于无法确切做到最优, 因此产生了许多近似方法。本章介绍了几个常用的方法, 如 NNF、PDAF、PFs。考虑到它们在这个研究领域的影响, 我们选择了这些算法, 但远不能构成一个完备的算法列表。本章没有详细讨论这样一类重要算法, 它通过确定且有限的高斯和来近似后验概率密度 (Ross, 2003^[145]; Wang 等, 2008^[163])。这类算法的基本思想是利用分量较少的高斯和近似分量较多的高斯和。另一种令人关注的方法是广义 PDAF, 它的特点是在多扫描周期内合并混合分量 (Sidenbladh, 2003^[148])。

第5章 杂波环境下的单/多目标跟踪： 基于目标存在性的方法

在许多实际应用中,目标的个数和存在性在跟踪之前是未知的,它们是跟踪输出信息的一个重要的部分。本章将目标的存在性纳入目标状态中,并如前面几章所述,目标状态的概率密度函数在各扫描周期之间的传播是一个马尔可夫过程,可用贝叶斯公式对其进行更新。

在杂波环境下,由于每个观测的来源是先验未知的,因此目标的存在性显得特别重要。本章揭示一系列基于目标存在性的目标跟踪滤波器之间的紧密联系,它们有着共同的推导和更新过程。

本章涉及的一些算法在本书其他章节中也有讨论,包括概率数据互联(PDA)(4.3节)、综合概率数据互联(IPDA)(5.4.4节和6.4.4节),以及联合IPDA(JIPDA)(6.4.5节)。本章将推导一种不同的跟踪方法,由于同时还考虑非均匀杂波,因此具有更广泛的适用性。

5.1 引言

目标跟踪的任务是基于目标和观测的假设模型,利用传感器获得的观测数据,估计一系列目标(通常为移动目标)的状态。

若无特殊说明,本章介绍的目标跟踪算法均基于如下假设:

(1) 目标:

① 监视区域内存在0或者多个目标,目标的数目和位置未知。

② 已知各种可能的目标轨迹模型,且轨迹模型的演变过程是一个马尔可夫链。

③ 每个扫描周期,每个目标将可能产生一个观测,以检测概率 P_d 出现,而 P_d 可能会因目标而异。换句话说,目标被假设为点目标,随机地生成0个或1个观测。

目标轨迹通常被建模为具有马尔可夫转移概率的随机过程,许多估计算法适用于这一场景。在这里仅适用于交互式多模型(IMM)(Blom和Bar-Shalom, 1988^[29]),详细内容参见3.4节。当目标运动模型个数为1时,交互式多模型估计则退化为卡尔曼滤波器。

(2) 杂波:

① 杂波观测的数目和位置是随机的,满足非均匀观测概率密度的泊松分布。

相对于第4章中提到的关于杂波观测在监视区域内均匀分布的假设,这是一个更为一般化的模型,也是一个更为实用的模型,因为在大多数应用背景中,杂波密度往往不是一致的。

② 监视区域内的杂波密度通常已知,否则将利用接收到的观测对其进行估计。

(3) 观测:

① 观测由具有无限分辨能力的传感器产生。也就是说,每一个观测只能来自一个源。当一个观测用来更新一条航迹时,它可能是以下情况中的其中一种:

被该条航迹跟踪的目标的观测;

杂波观测;

被另一条航迹跟踪的目标的观测。

以上三种假设构成了多目标跟踪的定义,而在单目标跟踪问题中,它们将被忽略。

② 对于每一个观测还有另一种可能,那就是它可能是来自一个未被任何已经存在的航迹跟踪的目标的观测。这样的目标称为新目标。由于缺乏新目标分布的先验知识,这一问题在航迹起始(详见9.4节)中单独处理。

③ 这里只考虑位置观测。当需要考虑其他观测分量(如目标幅度、多普勒速度等)时,可利用相应分量的先验概率密度函数将它们包含进来(Lerro 和 Bar-Shalom, 1990^[85], 1993^[86]; Mušicki 和 Evans, 2008^[120]; Wang 等, 2008^[163])。

这些假设在实际应用中通常无法完全满足。比如,传感器一般不可能具有无限分辨力,相邻的观测将会合并;反过来,对于高分辨传感器,一个目标在同一扫描中可能产生多个观测。然而,以上假设是对目标跟踪问题的一个适当简化,以便于大多数目标跟踪算法的推导。当然,如果实际应用场景大大偏离这些假设,目标跟踪的性能也会大打折扣(Mušicki 和 Evans, 1995^[116])。

在自动目标跟踪系统中,航迹起始和更新均基于观测完成。如果一个航迹由一个或多个杂波观测,或者由来自多个不同目标的观测建立,这条航迹实际上不能被看作是对任何目标的跟踪。另外,由于非理想的观测序列、目标机动、杂波观测、观测噪声、多目标效应等因素,或者多种因素综合的原因,一条航迹也有可能失去对目标的跟踪。最后,被真实航迹跟踪的目标也有可能在监视区域内物理地消失,如飞机着陆等轨迹终止、目标被遮挡、事实上消失(被击落或摧毁等)或者离开监视区域等。因此,在大多数跟踪场景中,每一条已经存在的航迹要么是跟踪实际目标的真实航迹,要么是一条虚假航迹。被航迹跟踪的目标的存在性是不确定的,也就是说,目标的存在是一个随机事件,使用概率描述是最佳选择。于是每一条航迹均有一个对应的潜在目标的存在概率。目标存在事件以马尔可夫规律演化,它的概率通过本章提出的算法以贝叶斯形式由观测递推计算。目标存在性概念由 Mušicki 等人(1994^[115])提出。

目标存在概率通常被用作航迹质量的一项指标,以进行虚假航迹剔除,包括真

实航迹的识别和确认、虚假航迹的识别和终结。目标存在概率的确切用途不是充当算法本身的一部分,而是为跟踪提供一个衡量航迹质量的工具。图 5.1 中描述了一种简单的虚假航迹剔除方案,航迹状态的演化过程如下:

- (1) 每条新航迹都要经历暂时航迹状态,基于后续观测,它可能被确认为真实航迹或被终结。
- (2) 如果目标存在的概率超过预先设定的航迹确认门限 t_c ,航迹则被确认,并保持确认状态直到被终结。
- (3) 当目标存在概率跌至预先设定的航迹终结门限 t_t 之下时,航迹则被终结并从内存中删除。

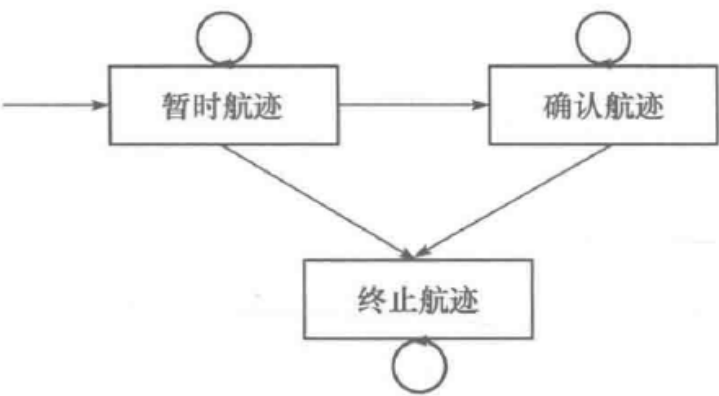


图 5.1 航迹状态演化示意图

所有存在的航迹要么处于暂时状态要么处于确认状态。确认航迹为操作员、融合中心或更高层处理中心使用,因为确认航迹对应目标的存在具有较高的置信水平。暂时航迹则往往只在目标跟踪算法内部演化和更新,操作员和高层信息处理中心通常不理睬暂时航迹。

虚假航迹剔除是监视系统中最重要的一项任务,准确地获知目标的存在以及目标的个数往往比目标状态估计精度的微弱改善要重要得多。

本章介绍的目标跟踪算法可以按照以下几种方式进行分类:

- (1) 单目标跟踪/多目标跟踪:单目标跟踪滤波器对每条航迹进行独立的状态更新,不考虑目标可能与其他航迹关联的问题。多目标跟踪则从全局考察观测与航迹的分配问题。
- (2) 单(非机动)模型跟踪/多模型跟踪。
- (3) 单扫描滤波器/多扫描滤波器:单扫描滤波器中,对于一条航迹仅用一个高斯概率密度函数逼近目标航迹的后验概率密度函数,当前扫描的所有观测被综合在一起。多扫描滤波器为每一种可能的观测序列均建立一个航迹概率密度函数,即通常所说的分量。航迹的完整概率密度函数是这些分量的混合。由于分量的个数随着时间呈指数增长,实际实现的大多是次优算法,分量的个数必须控制在计算资源可忍受的范围之内。
- (4) 目标随机存在/目标确定存在:目标确定存在滤波器假设对应每条航迹均有一个目标(以概率 1)存在。目标随机存在算法则为每条航迹是否确实对应一个

目标计算一个概率,这个目标存在性概率适用于虚假航迹剔除。

表 5.1 列出了本章将要介绍的跟踪算法。“IMM”代表“交互式多模型”算法,字母“J”代表“联合(Joint)”或者“多目标数据关联”,“ITS”代表“集成目标分裂”,“IPDA”代表“集成概率数据关联”,“PDA”代表“概率数据关联”。

表 5.1 基于目标存在性的跟踪器分类

类型		多扫描	单扫描	确定性存在
多目标	多模型	IMM - JITS	IMM - JIPDA	IMM - JPDA
	单模型	JITS	JIPDA	JPDA
单目标	多模型	IMM - ITS	IMM - IPDA	IMM - PDA
	单模型	ITS	IPDA	PDA

表 5.1 中最具普遍性的算法是 IMM - JITS 和 IMM - ITS,分别适用于多目标和单目标跟踪。表 5.1 中算法的特殊性自左向右或自上向下增强。譬如,JITS 实际上是目标模型个数为 1 的 IMM - JITS 算法,IMM - JIPDA 是观测序列(或航迹分量)个数为 1 的 IMM - JITS,JPDA 则相当于当固定目标存在概率为 1 时的 JIPDA。

一般来说,算法的专业性越强,目标轨迹状态概率密度函数的精度就越差,进而决定目标跟踪的整体性能。另一方面,专业性更强的算法对计算的要求则越小。

严格来说,表 5.1 中最右侧的算法,即 PDA、JPDA、IMM - PDA 和 IMM - JPDA,不能列为目标随机存在类跟踪算法,因为它们均假设所有的目标都确定存在。之所以将它们也列入本章内容,是因为它们可以通过一些简单的特殊化就可推导而得,并且额外地获得比原著(Bar - Shalom 和 Tse,1975^[10]; Bar - Shalom 和 Fortmann,1988^[7]; Bar - Shalom 和 Li,1993^[8]; Blom 和 Bloem,2002^[30])推导更加通用的描述和推导。特别地,这些算法现在均可适用于非均匀杂波密度假设。

表 5.1 中的所有算法共用相同的航迹状态、运算过程和推导过程(贝叶斯)。单目标跟踪是多目标跟踪的简化形式,为了使概念更加清晰易懂,这里将它们的数据关联描述和推导分离,其他的运算步骤对于两种情形则是一样的。这促成了同一思路贯穿始终,进而使本章内容更加统一易懂。本章给出了最通用算法的通用(贝叶斯)推导方法,而其他专用性更强的算法则可通过增加约束条件轻松获得。

通用的目标状态也使得在同一个应用中使用不同的跟踪算法成为可能。Mušicki 和 Evans(2004b,2008^[119,120])以及 Mušicki 和 La Scala(2008^[122])对暂时航迹处理使用 IPDA(或者 ITS),而对确认航迹则使用 JIPDA(或 JITS)算法,以应付复杂的多目标跟踪情况。对所有航迹的虚假航迹剔除则可以使用共同的基于目标存在概率的算法。这种组合极大地降低了运算量,但同时也保持了多目标跟踪算法所应有的好处。

本章中,上标(如 τ)有时被用来指代航迹,有时也会用来指代被航迹 τ 跟踪的目标。例如, $p(\chi_i^\tau)$ 代表目标 τ 的存在概率。一旦叙述背景中上标的意义非常明确,为了简洁,航迹上标则会省略。譬如,航迹预测操作将对每条航迹均独立地执

行,此时可省略航迹上标。

5.2 节将给出问题的描述和模型。包含目标存在事件和目标轨迹状态的混合状态将在 5.3 节中详细描述。5.4 节给出最优贝叶斯推导。5.5 节则给出本章的所有算法均共用的航迹更新循环。航迹分量控制技术在 5.6 节介绍。最后,单目标跟踪和多目标跟踪的具体实现算法分别在 5.7 节和 5.8 节给出。

本章只给出各种跟踪器的单个周期的更新过程。航迹起始、航迹合并以及杂波密度估计等问题归入第 9 章统一描述。

5.2 问题的描述

为了方便问题的阐述,本节将再次给出假定的问题模型的所有元素的定义和细节。

5.2.1 传感器

每个采样时刻 k 获得一批观测,每个观测的源先验未知。对于每个目标将以检测概率 P_d 随机地获得 0 个或 1 个观测,同时也会获得数目随机的杂波观测。

以 Y_k 代表 k 时刻传感器产生的观测集合。如 5.5.2 节所述, Y_k 的一个子集 y_k ,将用来更新航迹。观测子集选择过程以概率 P_c 选择目标点迹, P_c 为目标观测落入观测区域 V_k 中的预选波门部分的概率。

m_k 代表观测子集 y_k 中观测的个数(随机),而 $y_k(i)$ 指观测子集 y_k 的第 i 个元素。最后, Y^k 指到 k 时刻为止所有用来更新航迹的观测集合的序列:

$$Y^k = y_k \cup Y^{k-1}, Y^0 = \{ \} \quad (5.1)$$

通常情况下,特别是对于包括使用电扫描天线雷达在内的智能传感器来说,跟踪器无法预先知道下一批观测的扫描时刻,上一次扫描 $k-1$ 和当前扫描 k 之间的时间差 Δt_k ,很可能随扫描不同而不同,只有在当前扫描观测集 Y_k 到来之后才能获得。

5.2.2 目标

基于目标随机存在的单目标跟踪算法(IMM-ITS, ITS, IMM-IPDA 以及 IPDA)假设可能存在 0 个或 1 个目标,而基于目标确定存在的单目标跟踪算法(PDA 和 IMM-PDA)则假设有 1 个目标存在。

基于目标随机存在的多目标跟踪算法(IMM-JITS, JITS, IMM-JIPDA 以及 JIPDA)允许存在介于 0 和航迹数目之间任意个数的目标,而基于目标确定存在的多目标跟踪算法(JPDA 和 IMM-JPDA)则认为对应每一条航迹均有 1 个目标存在。

这里简单地认为目标运动模型的改变只在传感器采样时刻发生,而实际上机动目标的运动模式切换可能在任意时刻发生。进一步地,将目标模型限制为已知

的 M 个运动模型,目标状态演化模型为

$$\mathbf{x}_k = f(k, r_k, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{v}(k, r_k)) \quad (5.2)$$

式中: \mathbf{x}_k 为时刻 k 的目标轨迹; $r_k = 1, \dots, M$ 为 $k-1 \sim k$ 时间间隔内的目标运动模型; \mathbf{v} 为过程噪声(随机分量); f 是一个可能为非线性的传递函数。

本章中考虑线性目标运动模型,定义如下:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{F}_{r_k} \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{v}(k, r_k) \quad (5.3)$$

式中: \mathbf{F}_{r_k} 是机动目标模型 r_k 的状态转移矩阵; $\mathbf{v}(k, r_k)$ 为零均值、协方差为 \mathbf{Q}_{r_k} 的高斯白噪声,并与所有时刻的观测噪声统计独立。转移概率密度函数为

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, r_k) = N(\mathbf{x}_k; \mathbf{F}_{r_k} \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{Q}_{r_k}) \quad (5.4)$$

这一模型同时覆盖了非机动目标模型,即将模型个数设为 1。

当进行航迹状态演化和估计时,目标模型的确切编号是未知的,只能获得目标状态的条件估计,即 $r_k = \sigma, \sigma = 1, \dots, M$ 。为简化起见,本章用符号 σ 代表事件 $r_k = \sigma$ 。主由于目标的运动在一个时刻只可能遵循一个模型, $r_k = \sigma$ 为互斥事件。同时,假设事件集是完备的,也就是说,目标的运动必须遵循该集合中运动模型的其中一个模型。

目标模型的演化是一个马尔可夫过程,模型转移概率矩阵为 $\Gamma, \Gamma_{\sigma, \omega} = p(r_k = \omega | r_{k-1} = \sigma)$,表示由模型 σ 到模型 ω 的模型转移概率, r_k 代表 k 时刻目标运动模型。这在很大程度上要重复用到第 3 章介绍的各种机动模型。

5.2.3 目标观测

实际中目标观测与目标的运动模型无关,表示为

$$\mathbf{y}_k(i) = \mathbf{h}(k, \mathbf{x}_k, \mathbf{v}(k)) \quad (5.5)$$

式中: $\mathbf{y}_k(i)$ 是目标观测; \mathbf{h} 是一个可能的非线性函数; $\mathbf{v}(k)$ 是观测噪声。目标观测存在的前提是目标存在、目标被检测出来并且被航迹选中。目标观测是否存在以及其编号在事先均是未知的。

本章考虑线性观测模型,目标观测等于

$$\mathbf{y}_k(i) = \mathbf{H} \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \quad (5.6)$$

式中: \mathbf{H} 为观测矩阵; \mathbf{v}_k 为零均值、协方差为 \mathbf{R} 的高斯白噪声,它与模型噪声统计独立。

5.2.4 杂波观测

这里将第 4 章中的杂波模型进一步一般化。杂波观测的个数满足强度已知的泊松分布,称为杂波观测密度。

监视空间中杂波观测的个数为一个非齐次泊松过程, y 点杂波观测密度为 $\rho(y)$, 它与 y 相关。记监视空间以 y 为中心、体积为 V 的区域内杂波观测的个数

为 $N(y, V)$ 。 N 是强度为 $\rho(y)$ 的泊松过程的充分必要条件如下 (Kingman, 1992^[80]; Ross, 2003^[145]) :

- (1) 不重叠区域中的杂波个数统计独立;
- (2) $\rho(N(y, V) \geq 2) = o(V)$;
- (3) $\rho(N(y, V) = 1) = \rho(y)V + o(V)$ 。

其中, $o(V)$ 代表关于 V 的高次项。性质(1)是无限分辨假设的直接结果。本章使用简化记号: $\rho_k(i) \triangleq \rho(y_k(i))$ 。

假设在 k 时刻对 V_k 进行观测, 观测空间要么是航迹预选波门(单目标跟踪情况), 要么是航迹聚类区域(多目标跟踪情况)。 V_k 中杂波观测的统计平均个数为

$$\bar{m}_k = \int_{V_k} \rho(y) dV$$

若 $y_k(i)$ 为杂波观测, 则其似然函数(先验概率密度函数)为

$$p_{\rho,k}(i) = \rho_k(i) / \bar{m}_k \tag{5.7}$$

观测区域 V_k 中杂波观测个数为 m 的概率服从泊松分布

$$\mu_F(m) = \exp(-\bar{m}_k) \frac{\bar{m}_k^m}{m!} \tag{5.8}$$

式中: $\exp(\cdot)$ 代表以 e 为底的自然指数 $e^{(\cdot)}$ 。

与齐次杂波观测模型比较, 非齐次杂波观测模型更通用、更符合实际, 而齐次模型也可以看做非齐次模型的一个特例。杂波观测密度通常是非齐次的, 也就是说, 观测空间中在不同点有不同的杂波密度。如果杂波观测密度已知, 那么称其为参数化目标跟踪。在某些应用中, 杂波观测主要源自热噪声, 这种情况杂波观测密度可以离线计算得出。在另外一些应用中, 杂波观测密度可以利用先前扫描的数据估计而得, 如使用杂波测绘技术。

如果杂波观测密度未知, 这种情况称为非参数化目标跟踪, 需要通过每次扫描接收到的观测估计杂波密度。9.3 节介绍了一种杂波观测密度估计的方法。第 4 章介绍的所有算法均为非参数跟踪方法, 这类算法假设航迹预选波门范围内的杂波观测密度一致。

本章提到的一些跟踪算法, 如 PDA、JPDA、IMM - PDA 和 IMM - JPDA, 在第 4 章和第 6 章基于齐次杂波模型进行了推导, 本章将它们推广至更通用、更现实的非齐次杂波观测模型。

5.3 航迹状态

这里考虑混合航迹状态, 包含一个离散分量和一个连续分量, 分别代表目标存在性和目标轨迹状态概率密度函数。

5.3.1 目标存在性

Mušicki 等人(1994^[115])在其文章中定义了两种目标存在性演化模型。其中一个称为马尔可夫链一,目标存在性有两个可能的状态:

- (1) 目标存在;
- (2) 目标不存在。

如果目标存在,它的观测以检测概率 P_d 出现。本章默认使用此模型。另外一个目标存在性模型是马尔可夫链二(Mušicki 等,1994^[115]),该模型认为目标存在性有三种可能的状态:

- (1) 目标存在并可感知;
- (2) 目标存在但暂时不可感知;
- (3) 目标不存在。

举个例子,如果在目标和传感器之间有障碍物产生遮挡,则处于目标存在但暂时不可感知状态。如果目标存在并可感知,则目标观测以检测概率 P_d 出现。模型马尔可夫链二适合于检测概率未知或检测概率抖动的情況(Wang 和 Mušicki, 2007^[161]; Mušicki 和 Wang, 2004^[126]),其代价是模型略显复杂。为了描述清晰和简洁,本章接下来的内容均使用马尔可夫链一模型。

马尔可夫链一目标存在性模型定义两个互斥完备的事件,记为随机变量 E_k :

$$\chi_k \triangleq E_k = 1 \text{ (目标存在的事件)}$$

$$\chi_k \triangleq E_k = 0 \text{ (目标不存在的事件)}$$

目标存在性概率的演化可以通过马尔可夫链演化公式获得:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} p(\chi_k | Y^{k-1}) \\ p(\bar{\chi}_k | Y^{k-1}) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} p(\chi_k | Y^{k-1}) \\ 1 - p(\chi_k | Y^{k-1}) \end{bmatrix} \\ &= \gamma^T \begin{bmatrix} p(\chi_{k-1} | Y^{k-1}) \\ p(\bar{\chi}_{k-1} | Y^{k-1}) \end{bmatrix} = \gamma^T \begin{bmatrix} p(\chi_{k-1} | Y^{k-1}) \\ 1 - p(\chi_{k-1} | Y^{k-1}) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.9)$$

式中,矩阵 γ 的元素为目标存在性状态之间的转移概率:

$$\gamma_{ij} \triangleq p(E_k = 2 - j | E_{k-1} = 2 - i), i, j \in \{1, 2\}$$

并且

$$\gamma_{11} + \gamma_{12} = \gamma_{21} + \gamma_{22} = 1$$

这一操作代表基于马尔可夫链一的目标存在性预测(演化),伪函数形式为

$$p(\chi_k | Y^{k-1}) = \text{TEX}_p[p(\chi_{k-1} | Y^{k-1}), \gamma]$$

Mušicki 等人(1994^[115], 2007^[131])建议 γ_{21} 的值应为 0, 而 $\gamma_{22} = 1$, γ_{21} 代表假航迹到真实航迹的转移概率,虽然在实际系统中这种事件有可能会发生,如一条假航

迹开始跟上真目标,这也使得目标轨迹状态概率密度函数变得毫无意义。本书作者建议使用 $\gamma_{21} = 0$, 而将新航迹的出现视作航迹“出生”过程或航迹起始的一部分, 详见 9.4 节。因此式(5.9)退化为

$$p(\chi_k | Y^{k-1}) = \gamma_{11} p(\chi_{k-1} | Y^{k-1}) \quad (5.10)$$

式中: γ_{11} 表示 $k-1$ 时刻存在的目标在 k 时刻继续存在的概率, 可由下式计算 (Bar-Shalom 和 Li, 1993^[8]):

$$\gamma_{11} = 1 - \frac{\Delta t_k}{T_x}$$

式中: T_x 为监视区域内的平均目标寿命; Δt_k 为 $k-1$ 时刻到 k 时刻的时间间隔, 这里假设 $\Delta t_k \ll T_x$ 。

5.3.2 目标轨迹状态

k 时刻目标轨迹状态记为 x_k , 航迹状态的先验概率密度函数由下式给出:

$$p(x_k, \chi_k | Y^{k-1}) = p(x_k | \chi_k, Y^{k-1}) p(\chi_k | Y^{k-1}) \quad (5.11)$$

航迹状态的后验概率密度函数为

$$p(x_k, \chi_k | Y^k) = p(x_k | \chi_k, Y^k) p(\chi_k | Y^k) \quad (5.12)$$

目标轨迹状态的概率密度函数 $p(x_k)$ 通常以目标存在事件 χ_k 为条件进行计算。这里没有定义以目标不存在事件为条件的目标轨迹状态概率密度函数, 实际上它没有任何意义。

观测 $y_k(i_k)$ 是被航迹跟踪的目标的检测结果的事件, 记为 $\theta_k(i_k)$, $i_k \geq 0$ 。 $\theta_k(0)$ 代表没有预选观测是目标检测的事件, 当目标不存在, 或者目标在 k 时刻未被检测, 或者目标检测未被选择时, 该事件即可能发生。假设航迹在 $k=1$ 时刻起始, 可能的目标检测序列表示为

$$\xi_k(c_k) = \{i_1, \dots, i_k\}; i_\ell = 0, \dots, m_\ell; \ell = 1, \dots, k \quad (5.13)$$

式中: c_k 为 k 时刻历史观测序列的索引, $c_k = 1, \dots, C_k$, 满足

$$C_k = \prod_{\ell=1}^k (1 + m_\ell) \quad (5.14)$$

观测序列的情况可由图 5.2 和表 5.2 表示。在 $k=1$ 时刻航迹起始时只有一个观测, 因此也只有一个观测序列 $\xi_1(c_1)$ 。 $k=2$ 时有两个观测 1 和 2, “空”观测 0 对应于目标未被检测或者目标不存在事件。 $k=2$ 时刻每个观测均与 $k=1$ 时刻的观测序列进行关联, 建立 $k=2$ 时刻的观测序列 $\xi_2(c_2)$ 。在 $k=3$ 时重复这一过程, $k=3$ 时有一个观测 1 和空观测 0。 $k=2$ 时刻的每个观测序列 $\xi_2(c_2)$ 与 $k=3$ 时刻的每个观测进行关联得到 $k=3$ 时刻的观测序列 $\xi_3(c_3)$ 。

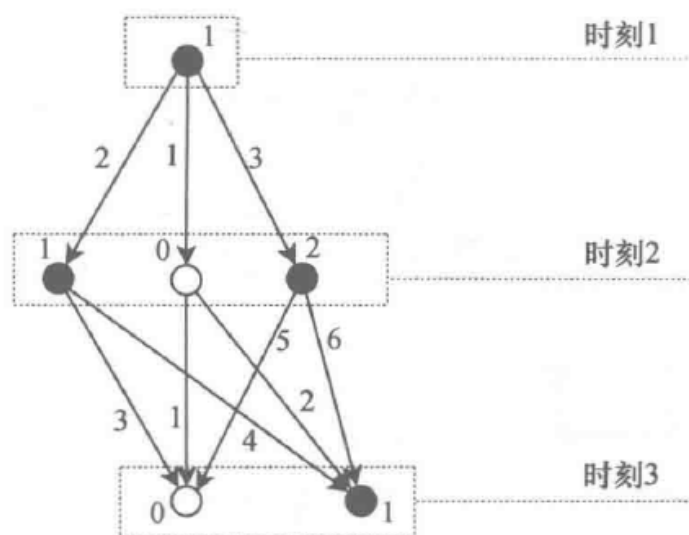


图 5.2 观测序列/航迹分量

表 5.2 观测序列/航迹分量

c_1	$\xi_1(c_1)$	c_2	$\xi_2(c_2)$	c_3	$\xi_3(c_3)$
1	{1}	1	{1,0}	1	{1,0,0}
				2	{1,0,1}
				3	{1,1,0}
		2	{1,1}	4	{1,1,1}
				5	{1,2,0}
				6	{1,2,1}

将以 $\xi_k(c_k)$ 为条件的目标轨迹概率密度函数,换句话说观测序列 $\xi_k(c_k)$ 是目标检测序列的假设,简记为 $p(\mathbf{x}_k | c_k)$:

$$p(\mathbf{x}_k | c_k) \triangleq p(\mathbf{x}_k | \xi_k(c_k), \chi_k, \mathbf{Y}^k)$$

而

$$p(c_k) \triangleq p(\xi_k(c_k) | \chi_k, \mathbf{Y}^k)$$

为观测序列 $\xi_k(c_k)$ 全由目标检测组成的后验概率。 $\{\xi_k(c_k) | \chi_k, \mathbf{Y}^k\}$ 为互斥事件,其中有且只有一个观测序列由目标检测组成:

$$\sum_{c_k} p(c_k) = \sum_{c_k} p(\xi_k(c_k) | \chi_k, \mathbf{Y}^k) = 1$$

给定一个目标运动模型已知的线性系统, $p(\mathbf{x}_k | c_k)$ 可通过对观测序列 $\xi_k(c_k)$ 执行卡尔曼滤波获得,此时 $p(\mathbf{x}_k | c_k)$ 是一个可由其均值和方差完全定义的高斯概率密度函数。本章考察一种更加通用的情况,使用 M 个可能的目标模型和交互式多模型 (IMM) 估计器,于是 $p(\mathbf{x}_k | c_k)$ 为 M 个高斯概率密度函数的高斯混合:

$$p(\mathbf{x}_k | c_k) = \sum_{\sigma=1}^M P(\mathbf{x}_k | c_k, \sigma) \mu_{klk}(c_k, \sigma) \quad (5.15)$$

σ 用以标记目标模型, $\mu_{klk}(c_k, \sigma)$ 代表以观测序列 $\xi_k(c_k)$ 正确事件为条件的目标

模型 σ 的后验概率密度,有

$$p(\mathbf{x}_k | c_k, \sigma) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_k; \bar{\mathbf{x}}_{k|k}(c_k, \sigma), \mathbf{P}_{k|k}(c_k, \sigma)) \quad (5.16)$$

应用全概率公式:

$$p(\mathbf{x}_k | \chi_k, \mathbf{Y}^k) = \sum_{c_k=1}^{c_k} p(\mathbf{x}_k | c_k) p(c_k) \quad (5.17)$$

$$= \sum_{i_1=0}^{m_1} \cdots \sum_{i_k=0}^{m_k} p(\mathbf{x}_k | \chi_k, \theta_1(i_1), \cdots, \theta_k(i_k), \mathbf{Y}^k) \times \\ p(\theta_1(i_1), \cdots, \theta_k(i_k) | \chi_k, \mathbf{Y}^k) \quad (5.18)$$

每个给定历史观测 $\xi_k(c_k)$ 的轨迹状态概率密度函数,称其为一个航迹分量,由 c_k 索引。航迹分量的个数,由式(5.14)给出,随着时间呈指数增长,这将导致运算资源快速耗尽。任何实际实现均不得不使用 5.5.5 节所述的各种技巧限制航迹分量的个数。由于使用了分量管理,式(5.13)和式(5.18)中关于分量的严格定义不再成立,但是航迹状态概率密度函数仍然是一个互斥集合,式(5.15)、式(5.16)和式(5.17)依然成立。

由于目标模型和航迹分量均为互斥完备事件,下面的关系成立:

$$\sum_{c_k=1}^{c_k} p(c_k) = \sum_{\sigma=1}^M \mu_{k|k}(c_k, \sigma) = 1 \\ \sum_{c_k=1}^{c_k} \sum_{\sigma=1}^M p(c_k) \mu_{k|k}(c_k, \sigma) = 1 \\ p(c_k), \mu_{k|k}(c_k, \sigma) \in [0, 1], \forall c_k, \sigma$$

这种目标轨迹状态模型(航迹分量集合,每个分量又包含 IMM)是本章所述所有算法的一个通用模型。这个模型可以直接应用于 IMM-ITS 和 IMM-JITS 算法,对于其他算法,则需做出各种界定,如单目标模型和单航迹分量假设。

5.4 最优贝叶斯递归

本节介绍最优预测和贝叶斯更新,这些运算是本章后续算法的重要组成部分。单目标跟踪器的最优更新和多目标跟踪器的最优更新有着本质上的区别,因此将它们分开叙述。

5.4.1 航迹预测

航迹状态预测包括从 $k-1$ 时刻的航迹状态

$$p(\mathbf{x}_{k-1}, \chi_{k-1} | \mathbf{Y}^{k-1}) = p(\chi_{k-1} | \mathbf{Y}^{k-1}) p(\mathbf{x}_{k-1} | \chi_{k-1}, \mathbf{Y}^{k-1})$$

演化为 k 时刻的航迹状态

$$p(\mathbf{x}_k, \chi_k | \mathbf{Y}^{k-1}) = p(\chi_k | \mathbf{Y}^{k-1}) p(\mathbf{x}_k | \chi_k, \mathbf{Y}^{k-1})$$

目标存在性概率则以马尔可夫链(见 5.3.1 节)传播:

$$p(\chi_k | Y^{k-1}) = \text{TEX}_p[p(\chi_{k-1} | Y^{k-1}), \gamma] \quad (5.19)$$

排除一些外来干扰(Mušicki 等, 2007^[131]), 从 $k-1$ 时刻到 k 时刻, 航迹分量的相对概率不会改变, 有

$$p(\mathbf{x}_k | \chi_k, Y^{k-1}) = \sum_{c_{k-1}=1}^{c_{k-1}} p(\mathbf{x}_k | c_{k-1}, \chi_{k-1}, Y^{k-1}) p(c_{k-1})$$

换句话说, 在轨迹状态概率密度函数演化中, 各轨迹状态分量是独立进行演化的。每个状态分量 c_{k-1} 包含一个 IMM 块, 因此每条航迹的状态概率密度函数演化由 IMM 混合与各个分量的预测操作组成:

$$\begin{aligned} & [\{\mu_{k|k-1}(c_{k-1}, \sigma), \bar{\mathbf{x}}_{k|k-1}(c_{k-1}, \sigma), \mathbf{P}_{k|k-1}(c_{k-1}, \sigma)\}_{\sigma}] \\ &= \text{IMM}_{\text{MP}}[\{\mu_{k-1|k-1}(c_{k-1}, \sigma), \bar{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}(c_{k-1}, \sigma), \mathbf{P}_{k-1|k-1}(c_{k-1}, \sigma), \mathbf{F}_{\sigma}, \mathbf{Q}_{\sigma}\}_{\sigma}, \Gamma] \end{aligned}$$

如果只有一个目标模型, $M=1$, IMM 混合与预测则退化为卡尔曼滤波器的预测操作, 如 JITS、JIPDA、JPDA、ITS、IPDA 和 PDA 等算法。于是, 对于每条航迹的每条分量有

$$[\bar{\mathbf{x}}_{k|k-1}(c_{k-1}), \mathbf{P}_{k|k-1}(c_{k-1})] = \text{KF}_p[\bar{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}(c_{k-1}), \mathbf{P}_{k-1|k-1}(c_{k-1}), \mathbf{F}, \mathbf{Q}]$$

k 时刻的预测目标轨迹状态概率密度函数由每个目标轨迹状态分量的预测概率密度函数的混合给出

$$p(\mathbf{x}_k | \chi_k, Y^{k-1}) = \sum_{c_{k-1}=1}^{c_{k-1}} p(\mathbf{x}_k | c_{k-1}, \chi_{k-1}, Y^{k-1}) p(c_{k-1}) \quad (5.20)$$

而每个目标轨迹分量状态的概率密度函数又由给定的目标轨迹模型的预测概率密度函数混合而成:

$$\begin{cases} p(\mathbf{x}_k | c_{k-1}, \chi_k, Y^{k-1}) = \sum_{\sigma=1}^M \mu_{k|k-1}(c_{k-1}, \sigma) p(\mathbf{x}_k | c_{k-1}, \sigma, \chi_k, Y^{k-1}) \\ p(\mathbf{x}_k | c_{k-1}, \sigma, \chi_k, Y^{k-1}) = N(\mathbf{x}_k; \bar{\mathbf{x}}_{k|k-1}(c_{k-1}, \sigma), \mathbf{P}_{k|k-1}(c_{k-1}, \sigma)) \end{cases} \quad (5.21)$$

航迹状态转换参数 γ 、 Γ 、 \mathbf{F} 和 \mathbf{Q} 由采样时刻 $k-1$ 与 k 之间的时间间隔 Δt_k 决定。2.8 节给出了 \mathbf{F} 和 \mathbf{Q} 的一个计算实例, γ 和 Γ 分别在 5.3.1 节和 3.4.1 节讨论。

5.4.2 目标观测似然函数

应用全概率公式计算航迹的目标检测位置的先验概率密度函数 $p(y | \chi_k, Y^{k-1})$, 即

$$p(y | \chi_k, Y^{k-1}) = \int_{\mathbf{x}_k} p(y | \mathbf{x}_k) p(\mathbf{x}_k | \chi_k, Y^{k-1}) d\mathbf{x}_k$$

这里使用了观测噪声是白噪声的这一事实。

应用式(5.20), 交换求和与积分顺序, 获得给定航迹分量 c_{k-1} 的目标检测位置

的先验概率密度函数

$$\begin{cases} p(y | \chi_k, Y^{k-1}) = \sum_{c_{k-1}=1}^{c_{k-1}} p(c_{k-1}) p(y | c_{k-1}, \chi_k, Y^{k-1}) \\ p(y | c_{k-1}, \chi_k, Y^{k-1}) = \int_{x_k} p(y | x_k) p(x_k | c_{k-1}, \chi_k, Y^{k-1}) dx_k \end{cases} \quad (5.22)$$

应用式(5.21), 交换求和与积分顺序, 可获得给定航迹分量 c_{k-1} 和目标轨迹模型 σ 的目标检测位置的先验概率密度函数:

$$\begin{cases} p(y | c_{k-1}, \chi_k, Y^{k-1}) = \sum_{\sigma=1}^M \mu_{k|k-1}(c_{k-1}, \sigma) p(y | c_{k-1}, \sigma, \chi_k, Y^{k-1}) \\ p(y | c_{k-1}, \sigma, \chi_k, Y^{k-1}) = \int_{x_k} p(y | x_k) p(x_k | c_{k-1}, \sigma, \chi_k, Y^{k-1}) dx_k \end{cases} \quad (5.23)$$

$$\begin{aligned} p(y | c_{k-1}, \sigma, \chi_k, Y^{k-1}) \\ = \int_{x_k} N(y; Hx_k, R_k) N(x_k; \hat{x}_{k|k-1}(c_{k-1}, \sigma), P_{k|k-1}(c_{k-1}, \sigma)) dx_k \\ N(y; \hat{y}_{k|k-1}(c_{k-1}, \sigma), S_k(c_{k-1}, \sigma)) \end{aligned} \quad (5.24)$$

给定分量 c_{k-1} 和轨迹模型 σ , 式(5.24)中预测观测位置均值 $\hat{y}_{k|k-1}(c_{k-1}, \sigma)$ 和协方差 $S_k(c_{k-1}, \sigma)$ 可由如下伪函数计算:

$$[\hat{y}_{k|k-1}(c_{k-1}, \sigma), S_k(c_{k-1}, \sigma)] = \text{MP}[\hat{x}_{k|k-1}(c_{k-1}, \sigma), P_{k|k-1}(c_{k-1}, \sigma), H, R] \quad (5.25)$$

式(5.25)已在 2.2.1 节定义:

$$\begin{aligned} \hat{y}_{k|k-1}(c_{k-1}, \sigma) &= H\hat{x}_{k|k-1}(c_{k-1}, \sigma) \\ S_k(c_{k-1}, \sigma) &= HP_{k|k-1}(c_{k-1}, \sigma)H^T + R \end{aligned}$$

式(5.24)用于计算所有监视区域的先验观测概率密度函数, 以观测被选中为条件的先验观测概率密度函数由下式给出:

$$\begin{aligned} p(y | y \in V_k(c_{k-1}, \sigma), c_{k-1}, \sigma, \chi_k, Y^{k-1}) \\ = \frac{1}{P_G} N(y; \hat{y}_{k|k-1}(c_{k-1}, \sigma), S_k(c_{k-1}, \sigma)) \end{aligned}$$

式(5.22)和式(5.23)仍然适用。

选中观测的似然函数等于它们的先验概率密度函数。本章使用下面的简化定义:

$$\begin{aligned} p_k(i, c_{k-1}, \sigma) &\triangleq p(y_k(i) | c_{k-1}, \sigma, \chi_k, Y^{k-1}) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{P_G} N(y_k(i); \hat{y}_{k|k-1}(c_{k-1}, \sigma), S_k(c_{k-1}, \sigma)) & y_k(i) \in V_k(c_{k-1}, \sigma) \\ 0 & y_k(i) \notin V_k(c_{k-1}, \sigma) \end{cases} \end{aligned} \quad (5.26)$$

将式(5.25) ~ 式(5.26)集成为一个伪函数,计算高斯状态概率密度函数所需的目标观测似然函数,记为

$$[\{p_k(i, c_{k-1}, \sigma)\}_i] = \text{ML}_1[\{\mathbf{y}_k(i)\}_i, \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}(c_{k-1}, \sigma), \mathbf{P}_{k|k-1}(c_{k-1}, \sigma), \mathbf{H}, \mathbf{R}] \quad (5.27)$$

同样地,推广至分量和航迹一级,有

$$p_k(i, c_{k-1}) \triangleq p(\mathbf{y}_k(i) | c_{k-1}, \chi_k, \mathbf{Y}^{k-1}) = \sum_{\sigma=1}^M \mu_{k|k-1}(c_{k-1}, \sigma) p_k(i, c_{k-1}, \sigma)$$

$$p_k(i) \triangleq p(\mathbf{y}_k(i) | \chi_k, \mathbf{Y}^{k-1}) = \sum_{c_{k-1}=1}^{C_{K-1}} p(c_{k-1}) p_k(i, c_{k-1})$$

所有未被航迹选中的观测的似然函数为零。

5.4.3 最优航迹更新

这里依据全书遵循的模板推导了最优航迹更新过程, Mušicki 等(2007^[131])、Mušicki 和 Evans(2008^[120])文献中给出了一种替代的推导过程。

航迹状态是一种混合状态,包含目标存在性事件和目标轨迹状态两部分,详见 5.3 节。航迹状态的先验概率密度函数见式(5.11):

$$p(\mathbf{x}_k, \chi_k | \mathbf{Y}^{k-1}) = p(\mathbf{x}_k | \chi_k, \mathbf{Y}^{k-1}) p(\chi_k | \mathbf{Y}^{k-1}) \quad (5.28)$$

它将被观测信息 \mathbf{y}_k 更新。观测集合 \mathbf{y}_k 提供的信息包括预选观测的个数 m_k 以及预选观测的位置。贝叶斯方程变成

$$p(\mathbf{x}_k, \chi_k | \mathbf{Y}^k) = \frac{p(\mathbf{y}_k, m_k | \mathbf{x}_k, \chi_k, \mathbf{Y}^{k-1})}{p(\mathbf{y}_k, m_k | \mathbf{Y}^{k-1})} p(\mathbf{x}_k, \chi_k | \mathbf{Y}^{k-1})$$

这里选择显式地包含 m_k 。利用式(5.28),对等式右边乘上再除以 $(p(\mathbf{y}_k, m_k | \chi_k, \mathbf{Y}^{k-1}))$

$$p(\mathbf{x}_k, \chi_k | \mathbf{Y}^k) = \frac{p(\mathbf{y}_k, m_k | \chi_k, \mathbf{Y}^{k-1})}{p(\mathbf{y}_k, m_k | \mathbf{Y}^{k-1})} p(\chi_k | \mathbf{Y}^{k-1}) \times$$

$$\frac{p(\mathbf{y}_k, m_k | \mathbf{x}_k, \chi_k, \mathbf{Y}^{k-1})}{p(\mathbf{y}_k, m_k | \chi_k, \mathbf{Y}^{k-1})} p(\mathbf{x}_k | \chi_k, \mathbf{Y}^{k-1})$$

分别应用贝叶斯公式,有

$$p(\chi_k | \mathbf{Y}^k) = \frac{p(\mathbf{y}_k, m_k | \chi_k, \mathbf{Y}^{k-1})}{p(\mathbf{y}_k, m_k | \mathbf{Y}^{k-1})} p(\chi_k | \mathbf{Y}^{k-1}) \quad (5.29)$$

$$p(\mathbf{x}_k | \chi_k, \mathbf{Y}^k) = \frac{p(\mathbf{y}_k, m_k | \mathbf{x}_k, \chi_k, \mathbf{Y}^{k-1})}{p(\mathbf{y}_k, m_k | \chi_k, \mathbf{Y}^{k-1})} p(\mathbf{x}_k | \chi_k, \mathbf{Y}^{k-1}) \quad (5.30)$$

可得式(5.12):

$$p(\mathbf{x}_k, \chi_k | \mathbf{Y}^k) = p(\mathbf{x}_k | \chi_k, \mathbf{Y}^k) p(\chi_k | \mathbf{Y}^k)$$

对于式(5.29)和式(5.30)计算航迹更新状态所需的似然函数,单目标跟踪和多目

标跟踪具有本质上的区别,因此分别进行讨论。

5.4.4 单目标更新

1. 观测似然

每一个观测有可能是杂波观测,或者是源自目标的观测。扼要重述一下,给定某观测 $y_k(i)$ 为杂波观测,其似然函数为式(5.7):

$$p_{\rho,k}(i) = \rho_k(i) / \bar{m}_k \quad (5.31)$$

记所有预选观测都不是目标检测的事件为 $\theta_k(0)$, 记观测 $y_k(i)$ 是目标检测的事件为 $\theta_k(i)$, $i > 0$ 。观测 $y_k(i)$ 是目标检测事件,要么以目标存在 $\{\theta_k(i) | \chi_k\}$ 为条件出现,要么作为目标存在性事件 $\{\theta_k(i) | \chi_k\}$ 子集的形式出现。事件 $\theta_k(0)$ 的先验概率为

$$p(\theta_k(0) | Y^{k-1}) = 1 - P_D P_G p(\chi_k | Y^{k-1})$$

$$p(\theta_k(0) | \chi_k, Y^{k-1}) = 1 - P_D P_G$$

由于目标观测的出现要求目标存在、目标被检测和观测被选择三者同时满足。记事件 $\theta_k(0)$ 的补集为 $\bar{\theta}_k(0)$, 即目标观测在 y_k 中出现的事件,那么有

$$p(\bar{\theta}_k(0) | \cdot) = 1 - p(\theta_k(0) | \cdot)$$

对于 $i > 0$, 有

$$p(\theta_k(i) | m_k, \bar{\theta}_k(0), \chi_k) = 1/m_k$$

上式是因为所有预选观测是目标观测的概率均等。

给定某观测 $y_k(i)$ 是目标的检测,它的似然函数为

$$p(y_k(i) | \theta_k(i), \chi_k, Y^{k-1}) = p_k(i) \quad (5.32)$$

其定义源自式(5.26)。依据式(5.6), 给定观测 $y_k(i)$ 是目标的检测,同时已知目标状态 x_k , 观测的似然函数为

$$f_k(i) \triangleq p(y_k(i) | x_k, \theta_k(i), \chi_k, Y^{k-1}) = \frac{1}{P_G} N(y_k(i); H_k x_k, R_k) \quad (5.33)$$

泊松分布的杂波观测的位置是相互独立的,它们也与目标观测互不相关,因此,观测集合 y_k 的似然函数为各观测 $y_k(i)$, $i = 1, \dots, m_k$ 似然函数的乘积。

所有导致集合 y_k 中所有观测都是杂波观测的情况有着相同的 y_k 的似然函数:

$$p(y_k | \bar{\chi}_k) = p(y_k | \theta_k(0), \chi_k) = p_{\rho,k} \triangleq \prod_{i=1}^{m_k} p_{\rho,k}(i) = \frac{1}{\bar{m}_k^{m_k}} \prod_{i=1}^{m_k} \rho_k(i)$$

$p_{\rho,k}$ 是一个适当简化的公式,给定类似的条件:预选杂波观测的个数为 m_k , 先验概率为

$$\mu_F(m_k) = \exp(-\bar{m}_k) \frac{\bar{m}_k^{m_k}}{m_k!}$$

给定观测 $y_k(i)$ 是目标的检测, 观测集合 y_k 的似然函数为

$$p(y_k | \theta_k(i), \chi_k, Y^{k-1}) = p_k(i) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m_k} p_{\rho,k}(j) = p_{\rho,k} \bar{m}_k \frac{p_k(i)}{\rho_k(i)}$$

并且

$$p(y_k | x_k, \theta_k(i), \chi_k, Y^{k-1}) = f_k(i) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m_k} p_{\rho,k}(j) = p_{\rho,k} \bar{m}_k \frac{f_k(i)}{\rho_k(i)}$$

此时预选观测中杂波观测的个数为 $m_k - 1$, 先验概率为

$$\mu_F(m_k - 1) = \exp(-\bar{m}_k) \frac{\bar{m}_k^{m_k-1}}{(m_k - 1)!} = \mu_F(m_k) \frac{m_k}{\bar{m}_k}$$

使用全概率公式, 有

$$\begin{aligned} p(y_k, m_k | \chi_k, Y^{k-1}) &= p(y_k, m_k | \theta_k(0), \chi_k, Y^{k-1}) p(\theta_k(0) | \chi_k, Y^{k-1}) + \\ &\quad p(y_k, m_k | \bar{\theta}_k(0), \chi_k, Y^{k-1}) p(\bar{\theta}_k(0) | \chi_k, Y^{k-1}) \end{aligned}$$

这里

$$\begin{aligned} p(y_k, m_k | \theta_k(0), \chi_k, Y^{k-1}) &= p(y_k | m_k, \theta_k(0), \chi_k, Y^{k-1}) p(m_k | \theta_k(0), \chi_k, Y^{k-1}) \\ &= p(y_k | \theta_k(0), \chi_k, Y^{k-1}) \mu_F(m_k) \\ &= p_{\rho,k} \mu_F(m_k) \end{aligned}$$

事件 $\bar{\theta}_k(0)$ 是互斥事件 $\theta_k(i), i = 1, \dots, m_k$ 的并集, 且有

$$p(y_k, m_k | \bar{\theta}_k(0), \chi_k, Y^{k-1}) = \sum_{i=1}^{m_k} p(y_k, m_k, \theta_k(i) | \bar{\theta}_k(0), \chi_k, Y^{k-1})$$

对于 $i > 0$, 有

$$\begin{aligned} &p(y_k, m_k, \theta_k(i) | \bar{\theta}_k(0), \chi_k, Y^{k-1}) \\ &= p(y_k | m_k, \theta_k(i), \bar{\theta}_k(0), \chi_k, Y^{k-1}) \times \\ &\quad p(\theta_k(i) | m_k, \bar{\theta}_k(0), \chi_k, Y^{k-1}) p(m_k | \bar{\theta}_k(0), \chi_k, Y^{k-1}) \\ &= p(y_k | \theta_k(i), \chi_k, Y^{k-1}) p(\theta_k(i) | m_k, \bar{\theta}_k(0), \chi_k) \mu_F(m_k - 1) \\ &= p_{\rho,k} \mu_F(m_k) p_k(i) / \rho_k(i) \end{aligned}$$

将其合在一起

$$p(y_k, m_k | \chi_k, Y^{k-1}) = p_{\rho,k} \mu_F(m_k) \left(1 - P_D P_G + P_D P_G \sum_{i=1}^{m_k} \frac{p_k(i)}{\rho_k(i)} \right)$$

定义观测似然比

$$\begin{aligned}
\Lambda_k &= \frac{p(y_k, m_k | \chi_k, Y^{k-1})}{p(y_k, m_k | \bar{\chi}_k, Y^{k-1})} \\
&= 1 - P_D P_G + P_D P_G \sum_{i=1}^{m_k} \frac{p_k(i)}{\rho_k(i)}
\end{aligned} \quad (5.34)$$

于是

$$p(y_k, m_k | \chi_k, Y^{k-1}) = p_{\rho, k} \mu_F(m_k) \Lambda_k \quad (5.35)$$

通过类似推导

$$\begin{aligned}
p(y_k, m_k | x_k, \chi_k, Y^{k-1}) &= p(y_k, m_k | \theta_k(0), \chi_k, x_k, Y^{k-1}) p(\theta_k(0) | \chi_k, Y^{k-1}) + \\
&\quad p(y_k, m_k | \bar{\theta}_k(0), \chi_k, x_k, Y^{k-1}) p(\bar{\theta}_k(0) | \chi_k, Y^{k-1})
\end{aligned}$$

同时注意到

$$p(y_k, m_k | \theta_k(0), \chi_k, x_k, Y^{k-1}) = p(y_k, m_k | \theta_k(0), \chi_k, Y^{k-1}) = \rho_k \mu_F(m_k)$$

和

$$p(y_k, m_k | \bar{\theta}_k(0), \chi_k, x_k, Y^{k-1}) = \sum_{i=1}^{m_k} p(y_k, m_k, \theta_k(i) | \bar{\theta}_k(0), \chi_k, x_k, Y^{k-1})$$

其中

$$\begin{aligned}
&p(y_k, m_k, \theta_k(i) | \bar{\theta}_k(0), \chi_k, x_k, Y^{k-1}) \\
&= p(y_k | x_k, m_k, \theta_k(i), \bar{\theta}_k(0), \chi_k, Y^{k-1}) \times \\
&\quad p(\theta_k(i) | m_k, \bar{\theta}_k(0), \chi_k, x_k, Y^{k-1}) p(m_k | \bar{\theta}_k(0), \chi_k, x_k, Y^{k-1}) \\
&= p(y_k | x_k, \theta_k(i), \chi_k, Y^{k-1}) p(\theta_k(i) | m_k, \bar{\theta}_k(0), \chi_k) \mu_F(m_k - 1) \\
&= p_{\rho, k} \mu_F(m_k) f_k(i) / \rho_k(i)
\end{aligned}$$

那么有

$$p(y_k, m_k | x_k, \chi_k, Y^{k-1}) = p_{\rho, k} \mu_F(m_k) (1 - P_D P_G + P_D P_G \sum_{i=1}^{m_k} \frac{f_k(i)}{\rho_k(i)}) \quad (5.36)$$

最后, 观测的非条件似然函数 $p(y_k, m_k | Y^{k-1})$ 等于

$$\begin{aligned}
p(y_k, m_k | Y^{k-1}) &= p(y_k, m_k | \bar{\chi}_k, Y^{k-1}) p(\bar{\chi}_k | Y^{k-1}) + \\
&\quad p(y_k, m_k | \chi_k, Y^{k-1}) p(\chi_k | Y^{k-1})
\end{aligned}$$

这里

$$\begin{aligned}
p(y_k, m_k | \bar{\chi}_k, Y^{k-1}) &= p(y_k, m_k | \theta_k(0), \chi_k, Y^{k-1}) \\
p(\bar{\chi}_k | Y^{k-1}) &= 1 - p(\chi_k | Y^{k-1})
\end{aligned}$$

重新组织,得到

$$p(y_k, m_k | Y^{k-1}) = p_{\rho, k} \mu_F(m_k) (1 - p(\chi_k | Y^{k-1}) (1 - \Lambda_k)) \quad (5.37)$$

2. 最优更新: $m_k = 0$

当 $m_k = 0$ 时, 观测集合 y_k 唯一提供的信息就是预选观测的个数, 于是式(5.29)变成

$$\begin{aligned} p(\chi_k | m_k = 0, Y^{k-1}) &= \frac{p(m_k = 0 | \chi_k, Y^{k-1})}{p(m_k = 0 | Y^{k-1})} p(\chi_k | Y^{k-1}) \\ &= \frac{p(\theta_k(0) | \chi_k, Y^{k-1})}{p(\theta_k(0) | Y^{k-1})} p(\chi_k | Y^{k-1}) \end{aligned}$$

这等价于

$$p(\chi_k | m_k = 0, Y^{k-1}) = \frac{(1 - P_D P_G) p(\chi_k | Y^{k-1})}{1 - P_D P_G p(\chi_k | Y^{k-1})} \quad (5.38)$$

式(5.30)则变成

$$\begin{aligned} p(x_k | \chi_k, m_k = 0, Y^{k-1}) &= \frac{p(m_k = 0 | x_k, \chi_k, Y^{k-1})}{p(m_k = 0 | \chi_k, Y^{k-1})} p(x_k | \chi_k, Y^{k-1}) \\ &\approx p(x_k | \chi_k, Y^{k-1}) \end{aligned} \quad (5.39)$$

当取较高的预选概率 P_G 时, 这一逼近的成立更为可靠 (Li 和 Bar - Shalom, 1997^[91])。

3. 最优更新: $m_k > 0$

应用式(5.35)和式(5.37)中的观测集合似然函数, 式(5.29)成为

$$p(\chi_k | Y^k) = \frac{\Lambda_k p(\chi_k | Y^{k-1})}{1 - (1 - \Lambda_k) p(\chi_k | Y^{k-1})} \quad (5.40)$$

将式(5.35)和式(5.36)中的观测集合似然函数应用于式(5.30):

$$p(x_k | \chi_k, Y^k) = \frac{1 - P_D P_G + P_D P_G \sum_{i=1}^{m_k} \frac{f_k(i)}{\rho_k(i)}}{\Lambda_k} p(x_k | \chi_k, Y^{k-1})$$

请注意

$$\begin{aligned} f_k(i) p(x_k | \chi_k, Y^{k-1}) &= f_k(i) p(x_k | \chi_k, Y^{k-1}) \frac{p_k(i)}{p_k(i)} \\ &= p_k(i) p(x_k | \chi_k, y_k(i), Y^{k-1}) \end{aligned} \quad (5.41)$$

上面最后一个式子由贝叶斯方程得出, $p(x_k | \chi_k, y_k(i), Y^{k-1})$ 是使用观测 $y_k(i)$ 更新后的目标状态概率密度函数。

定义

$$\beta_k(i) = \frac{1}{\Lambda_k} \cdot \begin{cases} 1 - P_D P_G, & i = 0 \\ P_D P_G p_k(i) / \rho_k(i), & i > 0 \end{cases} \quad (5.42)$$

并且注意到

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_k | \theta_k(0), \chi_k, \mathbf{Y}^k) &= p(\mathbf{x}_k | \chi_k, \mathbf{Y}^{k-1}) \\ p(\mathbf{x}_k | \theta_k(i), \chi_k, \mathbf{Y}^k) &= p(\mathbf{x}_k | \chi_k, \mathbf{y}_k(i), \mathbf{Y}^{k-1}) \end{aligned} \quad (5.43)$$

于是

$$p(\mathbf{x}_k | \chi_k, \mathbf{Y}^k) = \sum_{i=0}^{m_k} \beta_k(i) p(\mathbf{x}_k | \theta_k(i), \chi_k, \mathbf{Y}^k) \quad (5.44)$$

很容易得到

$$\beta_k(i) = p(\theta_k(i) | \chi_k, \mathbf{Y}^k) \quad (5.45)$$

而式(5.44)仅是全概率公式的另一种形式。

式(5.34)、式(5.40)以及式(5.42)的推导,没有对观测的先验概率密度函数 $p(\mathbf{y} | \chi_k, \mathbf{Y}^{k-1})$ (或者另一种情况中的杂波观测密度函数)的形状做任何假设,因此这些公式自然适用于高斯型、高斯混合型或者某些非线性等概率密度函数情况。

注意到对空集合进行求和运算结果为零,很容易看出式(5.34)、式(5.40)以及式(5.42)对 $m_k = 0$ 和 $m_k > 0$ 的情况均成立。

5.4.5 多目标更新

当不同航迹有共用观测,也就是说某些观测被多于一条航迹的波门选中时,则出现多目标更新问题。多目标跟踪与单目标跟踪区别于对观测源的假设前提,多目标跟踪中更新一条航迹时,每个观测只能有一个源,可能为以下之一种:

- (1) 杂波;
- (2) 被该航迹跟踪的目标;
- (3) 被其他航迹跟踪的目标。

由于某观测是目标的检测这一事件在航迹间是互斥的,但非相互独立的,因此最优贝叶斯更新操作必须同时考虑航迹聚类中的所有航迹。5.4.3节中的最优贝叶斯滤波方程依然成立,不过为了适应多目标跟踪情形,仍然有很多工作要做。另外,5.4.1节中的航迹预测与似然函数仍然有效,这些操作是一条航迹接着一航迹执行的,因此对于单目标跟踪和多目标跟踪都一样。

本节使用航迹上标(一般为 τ 和 η)区分不同的航迹。

1. 航迹聚类

当多目标出现时,观测源不再是独立的问题。如果某观测是某目标的检测,这会改变此观测作为其他目标检测的可能性,因为它们损失了一个作为它们检测的候选者。因此,观测与可能目标(航迹)的分配问题需要联合地或者全局地考虑。联合分配应包含所有观测与所有可能目标和杂波的配对。

多目标跟踪的最优贝叶斯方法即由所有联合观测分配的列举和评估组成。可行联合观测分配的个数随着航迹数和预选观测数的增加而出现组合爆炸现象。出于计算问题的考虑,一般先将航迹聚集在互斥的几个航迹聚类中,航迹聚类指:

某时刻一个航迹簇是一组航迹和它们的预选观测的集合,其定义由集合的补给出:所有不在该集合中的航迹的预选观测一定不属于该集合。

换句话说,任何选中聚类中观测的航迹均属于该聚类,且须将其选中的观测加入聚类中。需要指出的是,以上定义允许一条不和聚类中其他航迹共享其预选观测的航迹属于该聚类。一种简单的分聚类方法是将所有存在的航迹归为一聚类,但是为了使计算复杂度最小化,聚类中通常包含满足上述定义的最小航迹数。不与任何其他航迹共享观测的航迹可独立组成一聚类。

还需注意的是,每个扫描周期聚类要重新生成。某一周期同属一聚类的两条航迹在后续扫描中可能会在不同的聚类中,反之亦然。这一点可能会产生混淆,因为聚类这个词在 MHT(Reid,1979^[141])的文献中另有它意。

考察图 5.3 中的情形,有 4 条航迹(T1~T4)和 5 个观测(M1~M5),对应每条航迹则有其预选波门边界。若考虑最小航迹数的聚类,则图 5.3 中有 3 个聚类:

- (1) 航迹 T1 和 T2,共享观测 M1;
 - (2) 航迹 T3,其预选观测 M3 不与任何其他航迹共享,因此独自形成一聚类,这里不考虑航迹 T3 与航迹 T2 的预选波门的交叉;
 - (3) 航迹 T4,独自成聚类。
- 另外,两个以上聚类的并集也可作为一聚类。

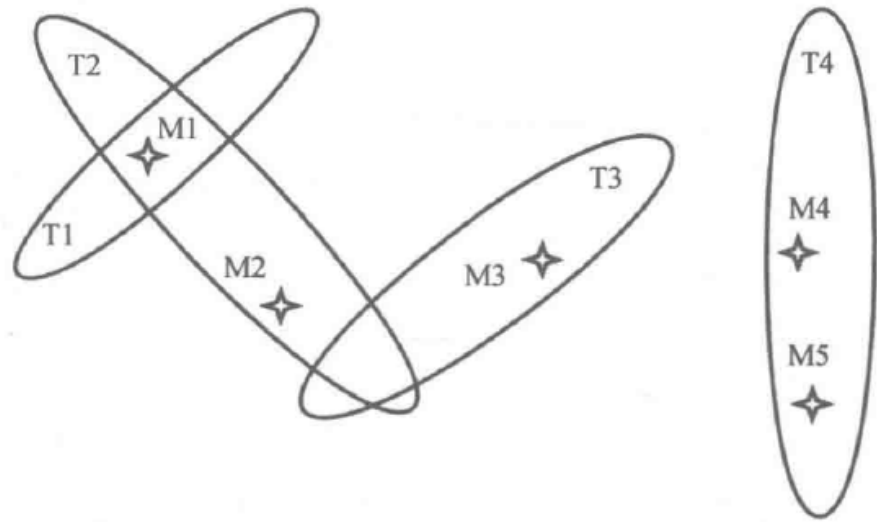


图 5.3 航迹聚类

最优多目标跟踪方法受制于计算复杂性。所有观测到所有航迹的可能分配(可行观测分配或可行联合事件)的个数随着观测数目和航迹数目的增加而呈现组合爆炸式增长。

假设所有航迹选择所有观测(包括目标未被检测的可能性), m 个观测到 T 条航迹的独立分配的个数(Mušicki 和 La Scala,2007^[131])为

$$\begin{cases} T! \sum_{t=0}^T \frac{1}{t!} \binom{m}{T-t} \geq (m+1)T! & m \geq T \geq 1 \\ m! \sum_{i=0}^m \frac{1}{i!} \binom{T}{m-i} \geq (T+1)m! & T \geq m \geq 1 \end{cases} \quad (5.46)$$

可行联合事件的个数只与观测个数、航迹个数以及观测波门预选结果有关,而与航迹分量的个数无关。

航迹聚类的目的是通过将航迹分成几组或聚类使计算复杂度最小化。假设式(5.46)中 $T=6$ 、 $m=6$,则所有可能的联合分配为 13327 个。如果将航迹分成 2 个聚类,每个聚类中 3 条航迹、3 个观测,则每聚类可行联合事件的个数为 34,总联合事件数为 68。

联合多目标跟踪处理对聚类内所有航迹同时进行,而忽略所有不属于该聚类的航迹。因此,在 5.4.5 节剩余部分,假设被考虑的航迹和观测均在同一个聚类中。

这里将聚类内所有航迹的预选波门区域的并集称为聚类区域,实际上它变成一个新的预选波门。将 k 时刻航迹 τ 的预选观测集记为 y_k^τ ,则航迹聚类预选观测集为

$$y_k = \bigcup_{\tau} y_k^\tau$$

2. 可行联合数据关联事件

一个联合事件即指聚类中所有观测到所有航迹的其中一个分配,也就是说,一个联合事件对应一个关于聚类中所有观测的源的一个假设。数学上,将联合事件 ε 定义为 $\varepsilon \triangleq \bigcap_{\tau=1}^T \theta_k^\tau(i(\tau, \varepsilon))$,其中, T 为聚类中航迹个数, $i = (\tau, \varepsilon)$ 为由联合事件 ε 分配给航迹 τ 的观测的编号。

基于传感器无限分辨和点目标的假设前提,一个可行的联合事件是指满足以下条件的一个联合事件:

- (1) 每条航迹至多分配一个观测;
- (2) 每个观测至多分配给一条航迹。

如果两个可行联合事件中至少有一个观测的分配不同,那么这就是两个不同的联合事件。不同的联合事件互斥,我们列举所有可能联合事件。考察如图 5.4 所示的只有一个聚类的多目标情形,3 条航迹 ($T1 \sim T3$) 选中 4 个观测 ($M1 \sim M4$),航迹的预选波门区域为椭圆。这个聚类中,可列出 21 个可行联合事件,部分事件如表 5.3 所列。例如,可行联合事件(3)将观测 $M2$ 分配给航迹 $T1$,而航迹 $T2$ 和 $T3$ 则没有分配到任何观测,观测 $M1$ 、 $M2$ 和 $M3$ 被认为是杂波。可行联合事件(21)将观测 $M2$ 、 $M3$ 和 $M4$ 分别分配给航迹 $T1$ 、 $T2$ 和 $T3$,而认为观测 $T1$ 是杂波。

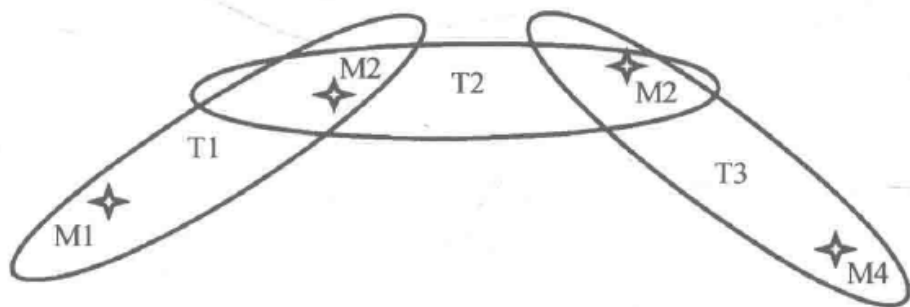


图 5.4 多目标情形

表 5.3 多目标联合事件

联合事件 ε	航迹 T1	航迹 T2	航迹 T3
(1)	0	0	0
(2)	M1	0	0
(3)	M2	0	0
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
(21)	M2	M3	M4

可行联合事件空间被细致地划分成了一系列互斥的联合事件,也可以粗略地将其分成一系列互斥的联合航迹检测事件。一个联合航迹检测事件 \mathcal{D} 可将航迹分为两个集合:

- (1) $T_0(\mathcal{D})$: 未分配到任何观测的航迹;
- (2) $T_1(\mathcal{D})$: 分配到一个观测的航迹。

每条航迹的检测事件是先验统计独立的。航迹 $\eta \in T_0(\mathcal{D})$ 没有预选检测结果的先验概率为

$$p(\theta_k^\eta(0) | Y^{k-1}) = 1 - P_D^\eta P_G^\eta p(\chi_k^\eta | Y^{k-1})$$

$$p(\theta_k^\eta(0) | \chi_k^\eta, Y^{k-1}) = p(\theta_k^\eta(0) | \chi_k^\eta, \mathbf{x}_k^\eta, Y^{k-1}) = 1 - P_D^\eta P_G^\eta$$

航迹 $\eta \in T_1(\mathcal{D})$ 有预选检测结果的先验概率为

$$p(\bar{\theta}_k^\eta(0) | Y^{k-1}) = P_D^\eta P_G^\eta p(\chi_k^\eta | Y^{k-1})$$

$$p(\bar{\theta}_k^\eta(0) | \chi_k^\eta, Y^{k-1}) = p(\bar{\theta}_k^\eta(0) | \chi_k^\eta, \mathbf{x}_k^\eta, Y^{k-1}) = P_D^\eta P_G^\eta$$

于是,一个联合检测事件 \mathcal{D} 的先验概率为

$$p(\mathcal{D} | Y^{k-1}) = \prod_{\eta \in T_0(\mathcal{D})} ((1 - P_D^\eta P_G^\eta p(\chi_k^\eta | Y^{k-1}))) \prod_{\eta \in T_1(\mathcal{D})} P_D^\eta P_G^\eta p(\chi_k^\eta | Y^{k-1})$$

使用相同的参数,仅仅改为以目标 τ 存在为条件,联合检测事件 \mathcal{D} 的先验概率为

$$p(\mathcal{D} | \chi_k^\tau, Y^{k-1}) = p(\mathcal{D} | \chi_k^\tau, \mathbf{x}_k^\tau, Y^{k-1})$$

$$= p(\mathcal{D} | Y^{k-1}) \begin{cases} \frac{1 - P_D^\tau P_G^\tau}{1 - P_D^\tau P_G^\tau p(\chi_k^\tau | Y^{k-1})} & \tau \in T_0(\varepsilon) \\ \frac{1}{p(\chi_k^\tau | Y^{k-1})} & \tau \in T_1(\varepsilon) \end{cases} \quad (5.47)$$

每一个可行联合事件 ε 对应一个联合检测事件 $\mathcal{D}(\varepsilon)$, 而一个联合检测事件 \mathcal{D} 则可能对应若干个可行联合事件。因此, 这是一个“一对多”的对应关系。表 5.3 中, 联合事件(2)和(3)对应同一个联合检测事件, 它们均暗示航迹 T1 被检测, 而航迹 T2 和 T3 没有检测。联合检测事件个数等于 2^T , T 为航迹个数。本例中, $2^3 = 8$ 个联合检测事件对 21 个可行联合事件构成的可行联合事件空间进行分割。

由于 $\varepsilon \in \mathcal{D}(\varepsilon)$, 有

$$\varepsilon = \varepsilon \cap \mathcal{D}(\varepsilon)$$

且

$$\begin{aligned} p(\cdot, \varepsilon | Y^{k-1}) &= p(\cdot, \varepsilon, \mathcal{D}(\varepsilon) | Y^{k-1}) \\ &= p(\cdot, \varepsilon | \mathcal{D}(\varepsilon), Y^{k-1}) p(\mathcal{D}(\varepsilon) | Y^{k-1}) \end{aligned}$$

将所有与联合检测事件 \mathcal{D} 对应的联合事件的集合记为 $\varepsilon(\mathcal{D})$, 所有联合检测事件 \mathcal{D} 的集合覆盖可行联合事件空间, 于是

$$\sum_{\mathcal{D}} \sum_{\varepsilon \in \varepsilon(\mathcal{D})} \cdot = \sum_{\varepsilon} \cdot$$

3. 观测似然

使用贝叶斯方程对每条航迹 τ 进行更新, 也就是说, 5.4.3 节所述理论仍然适用。为了叙述方便, 这里重复式(5.29)和式(5.30), 其中以上标 τ 标记航迹 τ :

$$p(\chi_k^\tau | Y^k) = \frac{p(y_k, m_k | \chi_k^\tau, Y^{k-1})}{p(y_k, m_k | Y^{k-1})} p(\chi_k^\tau | Y^{k-1}) \quad (5.48)$$

$$p(x_k^\tau | \chi_k^\tau, Y^k) = \frac{p(y_k, m_k | x_k^\tau, \chi_k^\tau, Y^{k-1})}{p(y_k, m_k | \chi_k^\tau, Y^{k-1})} p(x_k^\tau | \chi_k^\tau, Y^{k-1}) \quad (5.49)$$

式(5.12)仍然成立:

$$p(x_k^\tau, \chi_k^\tau | Y^k) = p(x_k^\tau | \chi_k^\tau, Y^k) p(\chi_k^\tau | Y^k)$$

在多目标跟踪中, 需要考虑互斥可行联合事件 ε 的完备集合并对 ε 求和, 或者使用全概率定理

$$\begin{aligned} p(y_k, m_k | \cdot, Y^{k-1}) &= \sum_{\varepsilon} p(y_k, m_k, \varepsilon, \mathcal{D}(\varepsilon) | \cdot, Y^{k-1}) \\ &= \sum_{\varepsilon} p(y_k | m_k, \varepsilon, \mathcal{D}(\varepsilon), \cdot, Y^{k-1}) p(\varepsilon | m_k, \mathcal{D}(\varepsilon), \cdot, Y^{k-1}) \times \\ &\quad p(m_k | \mathcal{D}(\varepsilon), \cdot, Y^{k-1}) p(\mathcal{D}(\varepsilon) | \cdot, Y^{k-1}) \end{aligned} \quad (5.50)$$

对联合事件 ε 作如下定义:

- (1) $M_0(\varepsilon)$: 未分配给任何航迹的观测集合;
- (2) $T_0(\varepsilon) = T_0(\mathcal{D}(\varepsilon))$: 未分配观测的航迹的集合, 其势为 $t_0(\varepsilon)$;
- (3) $T_1(\varepsilon) = T_1(\mathcal{D}(\varepsilon))$: 分配到一个观测的航迹的集合, 其势为 $t_1(\varepsilon)$;
- (4) $i(\tau, \varepsilon)$: 分配给航迹 τ 的观测的编号。

对于表 5.3 中的联合事件(2)有: $T_0(2) = \{T2, T3\}$, $T_1(2) = \{T1\}$, $i(T1, 2) = 1$, $i(T2, 2) = 0$, $i(T3, 2) = 0$; 对联合事件(21)有: $T_0(21) = \{\}$ (空

集), $T_1(21) = \{T1, T2, T3\}$, $i(T1, 21) = 2, i(T2, 21) = 3, i(T3, 21) = 4$ 。

记联合事件 $\mathcal{D}(\varepsilon)$ 中被认为是杂波的观测个数为 $t_c(\varepsilon)$, 有

$$t_c(\varepsilon) + t_1(\varepsilon) = m_k$$

m_k 个观测在 $t_1(\varepsilon)$ 条航迹之间的所有可能分配的个数等于

$$V_{t_1(\varepsilon)}^{m_k} = t_1(\varepsilon)! C_{t_1(\varepsilon)}^{m_k} = \frac{m_k!}{t_c(\varepsilon)!}$$

这里每种分配都具有相同的(先验)可能性, 于是

$$p(\varepsilon | m_k, \mathcal{D}(\varepsilon), Y^{k-1}) = \frac{t_c(\varepsilon)!}{m_k!} \quad (5.51)$$

存在 $t_c(\varepsilon)$ 个预选杂波观测的先验概率等于

$$\begin{aligned} p(m_k | \mathcal{D}(\varepsilon), Y^{k-1}) &= \mu_F(t_c(\varepsilon)) = \exp(-\bar{m}_k) \frac{\bar{m}_k^{t_c(\varepsilon)}}{t_c(\varepsilon)!} \\ &= \mu_F(m_k) \bar{m}_k^{-t_1(\varepsilon)} \frac{m_k!}{t_c(\varepsilon)!} \end{aligned} \quad (5.52)$$

它与目标存在事件无关。给定联合检测事件, 于是

$$\begin{aligned} p(m_k | \mathcal{D}(\varepsilon), \chi_k^\tau, Y^{k-1}) &= p(m_k | \mathcal{D}(\varepsilon), \chi_k^\tau, \mathbf{x}_k^\tau, Y^{k-1}) \\ &= p(m_k | \mathcal{D}(\varepsilon), Y^{k-1}) \end{aligned} \quad (5.53)$$

参照 5.4.4 节中的推导过程, 给定观测分配, 每个观测个体 $y_k(i)$ 的似然函数相互独立, 观测集 y_k 的似然函数则为各个似然函数的乘积:

$$\begin{aligned} p(y_k | \varepsilon, m_k, \mathcal{D}(\varepsilon), Y^{k-1}) &= \prod_{y_k(i) \in M_0} \frac{\rho_k(i)}{\bar{m}_k} \prod_{\eta \in T_1} p_k^\eta(i(\eta, \varepsilon)) \\ &= p_{\rho, k} \bar{m}_k^{-t_1(\varepsilon)} \prod_{\eta \in T_1} \frac{p_k^\eta(i(\eta, \varepsilon))}{\rho_k(i(\eta, \varepsilon))} \end{aligned} \quad (5.54)$$

给定 ε 的情况下, 尽管目标的状态信息可能改变观测似然函数的值, 但目标存在事件不会产生影响。

$$p(y_k | \varepsilon, m_k, \mathcal{D}(\varepsilon), \chi_k^\tau, Y^{k-1}) = p(y_k | \varepsilon, m_k, \mathcal{D}(\varepsilon), Y^{k-1}) \quad (5.55)$$

$$\begin{aligned} &p(y_k | \varepsilon, m_k, \mathcal{D}(\varepsilon), \chi_k^\tau, \mathbf{x}_k^\tau, Y^{k-1}) \\ &= p(y_k | \varepsilon, m_k, \mathcal{D}(\varepsilon), Y^{k-1}) \begin{cases} 1 & \tau \in T_0(\varepsilon) \\ \frac{f_k^\tau(i)}{p_k^\tau(i)} & \tau \in T_1(\varepsilon) \end{cases} \end{aligned} \quad (5.56)$$

综合式(5.50)、式(5.51)、式(5.52)和式(5.54), 可得

$$\begin{aligned} p(y_k, m_k | Y^{k-1}) &= p_{\rho, k} \mu_F(m_k) \sum_{\varepsilon} \prod_{\eta \in T_0(\varepsilon)} (1 - P_D^\eta P_G^\eta P\{c_k, \sigma\eta | Y^{k-1}\}) \times \\ &\quad \prod_{\eta \in T_1(\varepsilon)} P_D^\eta P_G^\eta P\{\chi_k^\eta | Y^{k-1}\} \frac{p_k^\eta(i(\eta, \varepsilon))}{\rho_k(i(\eta, \varepsilon))} \end{aligned}$$

为方便起见,定义 $A(\varepsilon)$ 为

$$A(\varepsilon) = \prod_{\eta \in T_0(\varepsilon)} (1 - P_D^\eta P_G^\eta P\{c_k, \sigma\eta \mid Y^{k-1}\}) \prod_{\eta \in T_1(\varepsilon)} P_D^\eta P_G^\eta P\{\chi_k^\eta \mid Y^{k-1}\} \frac{p_k^\eta(i(\eta, \varepsilon))}{\rho_k(i(\eta, \varepsilon))}$$

于是

$$p(y_k, m_k \mid Y^{k-1}) = p_{\rho, k} \mu_F(m_k) \sum_{\varepsilon} A(\varepsilon) \quad (5.57)$$

比较式(5.50)和式(5.57),有

$$p(y_k, m_k, \varepsilon \mid Y^{k-1}) = p_{\rho, k} \mu_F(m_k) A(\varepsilon)$$

可行联合事件 ε 的后验概率等于

$$\begin{aligned} p(\varepsilon \mid Y^k) &= \frac{p(y_k, m_k, \varepsilon \mid Y^{k-1})}{p(y_k, m_k \mid Y^{k-1})} \\ &= \frac{A(\varepsilon)}{\sum_{\varepsilon} A(\varepsilon)} \end{aligned} \quad (5.58)$$

将观测 i 分配给航迹 τ 的可行联合事件集合记为 $\Xi(\tau, i)$, 集合 $\Xi(\tau, 0)$ 则包含所有满足 $\tau \in T_0(\varepsilon)$ 的可行联合事件 ε 。对于 $i \neq j$, $\Xi(\tau, i)$ 与 $\Xi(\tau, j)$ 为非相交集合, 而所有集合 $\Xi(\tau, i)$, $i = 0, \dots, m_k$ 的并集则对应所有可行联合事件的集合。

综合式(5.50)、式(5.47)、式(5.53)和式(5.55),得到

$$\begin{aligned} p(y_k, m_k \mid \chi_k^\tau, x_k^\tau, Y^{k-1}) &= p_{\rho, k} \mu_F(m_k) \times \\ &\left(\frac{1 - P_D^\tau P_G^\tau}{1 - P_D^\tau P_G^\tau p(\chi_k^\tau \mid Y^{k-1})} \sum_{\varepsilon \in \Xi(\tau, 0)} A(\varepsilon) + \frac{1}{p(\chi_k^\tau \mid Y^{k-1})} \sum_{i=1}^{m_k} \sum_{\varepsilon \in \Xi(\tau, i)} A(\varepsilon) \right) \end{aligned} \quad (5.59)$$

使用式(5.50)、式(5.47)、式(5.53)以及式(5.56),可得

$$\begin{aligned} p(y_k, m_k \mid \chi_k^\tau, x_k^\tau, Y^{k-1}) &= p_{\rho, k} \mu_F(m_k) \left(\frac{1 - P_D^\tau P_G^\tau}{1 - P_D^\tau P_G^\tau p(\chi_k^\tau \mid Y^{k-1})} \sum_{\varepsilon \in \Xi(\tau, 0)} A(\varepsilon) + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{p(\chi_k^\tau \mid Y^{k-1})} \sum_{i=1}^{m_k} \frac{f_k^\tau(i)}{p_k^\tau(i)} \sum_{\varepsilon \in \Xi(\tau, i)} A(\varepsilon) \right) \end{aligned} \quad (5.60)$$

将式(5.57)和式(5.59)表示的似然值代入式(5.48),航迹 τ 的目标存在的后验概率为

$$p(\chi_k^\tau \mid Y^k) = \frac{\frac{(1 - P_D^\tau P_G^\tau) p(\chi_k^\tau \mid Y^{k-1})}{1 - P_D^\tau P_G^\tau p(\chi_k^\tau \mid Y^{k-1})} \sum_{\varepsilon \in \Xi(\tau, 0)} A(\varepsilon) + \sum_{i=1}^{m_k} \sum_{\varepsilon \in \Xi(\tau, i)} A(\varepsilon)}{\sum_{\varepsilon} A(\varepsilon)}$$

再联合式(5.58),则变成

$$\begin{aligned} p(\chi_k^\tau \mid Y^k) &= \frac{(1 - P_D^\tau P_G^\tau) p(\chi_k^\tau \mid Y^{k-1})}{1 - P_D^\tau P_G^\tau p(\chi_k^\tau \mid Y^{k-1})} \sum_{\varepsilon \in \Xi(\tau, 0)} p(\varepsilon \mid Y^k) + \sum_{i=1}^{m_k} \sum_{\varepsilon \in \Xi(\tau, i)} p(\varepsilon \mid Y^k) \end{aligned} \quad (5.61)$$

讨论 5.1 事件 $\theta_k^\tau(0)$ 等于作为 $\Xi(\tau, 0)$ 元素的联合事件的并集

$$\theta_k^\tau(0) = \bigcup_{\varepsilon \in \Xi(\tau, 0)} \varepsilon \quad (5.62)$$

证明: 作为 $\Xi(\tau, 0)$ 元素的每一个可行联合事件 ε 均意味着航迹 τ 未分配到任何观测, 相当于事件 $\theta_k^\tau(0)$ 。因此, 有

$$\varepsilon \in \Xi(\tau, 0) \Rightarrow \theta_k^\tau(0)$$

或者

$$\theta_k^\tau(0) \subseteq \bigcup_{\varepsilon \in \Xi(\tau, 0)} \varepsilon \quad (5.63)$$

另一方面, 每一个不是 $\Xi(\tau, 0)$ 元素的可行联合事件则意味着航迹 τ 被分配了观测, 也就是说事件 $\theta_k^\tau(0)$ 不是真的, 或者

$$\varepsilon \notin \Xi(\tau, 0) \Rightarrow \bar{\theta}_k^\tau(0)$$

上式表明

$$\theta_k^\tau(0) \Rightarrow \varepsilon \in \Xi(\tau, 0)$$

或者

$$\bigcup_{\varepsilon \in \Xi(\tau, 0)} \varepsilon \subseteq \theta_k^\tau(0) \quad (5.64)$$

由式(5.63)和式(5.64), 有

$$\bigcup_{\varepsilon \in \Xi(\tau, 0)} \varepsilon = \theta_k^\tau(0)$$

讨论 5.2 对于 $1 \leq i \leq m_k$, 事件 $\langle \theta_k^\tau(i), \chi_k^\tau \rangle$ 等价于作为 $\Xi(\tau, i)$ 元素的联合事件的并集

$$\langle \theta_k^\tau(i), \chi_k^\tau \rangle = \bigcup_{\varepsilon \in \Xi(\tau, i)} \varepsilon \quad (5.65)$$

证明: 证明过程与讨论 5.1 的证明过程相似。

由于讨论 5.1 以及联合事件的互斥性, 有

$$p(\theta_k^\tau(0) | Y^k) = \sum_{\varepsilon \in \Xi(\tau, 0)} p(\varepsilon | Y^k) \quad (5.66)$$

由于讨论 5.2 以及联合事件的互斥性, 对于 $i > 0$, 有

$$p(\theta_k^\tau(i), \chi_k^\tau | Y^k) = \sum_{\varepsilon \in \Xi(\tau, i)} p(\varepsilon | Y^k) \quad (5.67)$$

将这些结果应用于式(5.61), 有

$$p(\chi_k^\tau | Y^k) = \frac{(1 - P_D^\tau P_G^\tau) p(\chi_k^\tau | Y^{k-1})}{1 - P_D^\tau P_G^\tau p(\chi_k^\tau | Y^{k-1})} p(\theta_k^\tau(0) | Y^k) + \sum_{i=1}^{m_k} p(\theta_k^\tau(i), \chi_k^\tau | Y^k)$$

同式(5.38)的推导类似(用事件 $\theta_k^\tau(0)$ 代替时间 $m_k = 0$, 同时 Y^{k-1} 替换为 Y^k), 很容易得到

$$p(\theta_k^\tau(0), \chi_k^\tau | Y^k) = \frac{(1 - P_D^\tau P_G^\tau) p(\chi_k^\tau | Y^{k-1})}{1 - P_D^\tau P_G^\tau p(\chi_k^\tau | Y^{k-1})} p(\theta_k^\tau(0) | Y^k) \quad (5.68)$$

目标存在的更新概率为

$$p(\chi_k^\tau | Y^k) = \sum_{i=0}^{m_k} p(\theta_k^\tau(i), \chi_k^\tau | Y^k) \quad (5.69)$$

为了获得目标轨迹状态的后验概率密度函数,将式(5.59)和式(5.60)定义的似然值代入式(5.49),并使用式(5.66)和式(5.67):

$$p(\mathbf{x}_k^\tau | \chi_k^\tau, Y^k) = p(\mathbf{x}_k^\tau | \chi_k^\tau, Y^{k-1}) \times \frac{\frac{1 - P_D^\tau P_G^\tau}{1 - P_D^\tau P_G^\tau p(\chi_k^\tau | Y^{k-1})} p(\theta_k^\tau(0) | Y^k) + \frac{1}{p(\chi_k^\tau | Y^{k-1})} \sum_{i=1}^{m_k} \frac{f_k^\tau(i)}{p_k^\tau(i)} p(\theta_k^\tau(i), \chi_k^\tau | Y^k)}{\frac{1 - P_D^\tau P_G^\tau}{1 - P_D^\tau P_G^\tau p(\chi_k^\tau | Y^{k-1})} p(\theta_k^\tau(0) | Y^k) + \frac{1}{p(\chi_k^\tau | Y^{k-1})} \sum_{i=1}^{m_k} p(\theta_k^\tau(i), \chi_k^\tau | Y^k)}$$

再使用式(5.68)与式(5.69),则变成

$$p(\mathbf{x}_k^\tau | \chi_k^\tau, Y^k) = \frac{p(\theta_k^\tau(0), \chi_k^\tau | Y^k) + \sum_{i=1}^{m_k} \frac{f_k^\tau(i)}{p_k^\tau(i)} p(\theta_k^\tau(i), \chi_k^\tau | Y^k)}{p(\chi_k^\tau | Y^k)} p(\mathbf{x}_k^\tau | \chi_k^\tau, Y^{k-1})$$

同最优单目标轨迹更新一样,这里定义

$$\beta_k^\tau(i) = p(\theta_k^\tau(i) | \chi_k^\tau, Y^k) = \frac{p(\theta_k^\tau(i), \chi_k^\tau | Y^k)}{p(\chi_k^\tau | Y^k)} \quad (5.70)$$

并注意,如式(5.41)中情形:

$$f_k^\tau(i) p(\mathbf{x}_k^\tau | \chi_k^\tau, Y^{k-1}) = p_k^\tau(i) p(\mathbf{x}_k^\tau | \chi_k^\tau, \mathbf{y}_k(i), Y^{k-1})$$

式中: $p(\mathbf{x}_k^\tau | \chi_k^\tau, \mathbf{y}_k(i), Y^{k-1})$ 是用观测 $\mathbf{y}_k(i)$ 对预测目标轨迹状态概率密度函数进行更新后的目标状态概率密度函数。

可以马上写出

$$p(\mathbf{x}_k^\tau | \chi_k^\tau, Y^k) = \sum_{i=0}^{m_k} \beta_k^\tau(i) p(\mathbf{x}_k^\tau | \theta_k^\tau(i), \chi_k^\tau, Y^k) \quad (5.71)$$

式(5.71)同单目标轨迹状态概率密度函数式(5.44)一致。一旦条件数据关联概率 $\beta_k^\tau(i)$ 被正确计算,单目标和多目标的轨迹更新则会以相同的方式进行。

5.4.6 航迹状态更新

这个过程对于各条航迹单独执行,因此单目标跟踪和多目标跟踪具有相同的航迹状态更新。单目标跟踪(5.4.4节)和多目标跟踪(5.4.5节)均定义条件后验数据关联概率:

$$\beta_k(i) = p(\theta_k(i) | \chi_k, Y^k) = \frac{p(\theta_k(i), \chi_k | Y^k)}{p(\chi_k | Y^k)}$$

计算此概率并用其更新轨迹状态概率密度函数,如式(5.44)、式(5.71),有

$$p(\mathbf{x}_k | \chi_k, \mathbf{Y}^k) = \sum_{i=0}^{m_k} \beta_k(i) p(\mathbf{x}_k | \theta_k(i), \chi_k, \mathbf{Y}^k) \quad (5.72)$$

假设观测 $y_k(i)$ 是目标的检测结果, 则

$$p(\mathbf{x}_k | \theta_k(i), \chi_k, \mathbf{Y}^k) = p(\mathbf{x}_k | \chi_k, y_k(i), \mathbf{Y}^{k-1})$$

假定 y_k 中没有任何观测是目标的检测, 将用预测概率密度函数作为更新的概率密度函数, $i=0$, 有

$$p(\mathbf{x}_k | \theta_k(0), \chi_k, \mathbf{Y}^k) = p(\mathbf{x}_k | \chi_k, \mathbf{Y}^{k-1})$$

k 时刻的预测轨迹概率密度函数为

$$p(\mathbf{x}_k | \chi_k, \mathbf{Y}^{k-1}) = \sum_{c_{k-1}=1}^{c_{k-1}} p(c_{k-1}) \cdot \sum_{\sigma=1}^M \mu_{k|k-1}(c_{k-1}, \sigma) p(\mathbf{x}_k | c_{k-1}, \sigma, \chi_k, \mathbf{Y}^{k-1})$$

这里

$$p(\mathbf{x}_k | c_{k-1}, \sigma, \chi_k, \mathbf{Y}^{k-1}) = N(\mathbf{x}_k; \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}(c_{k-1}, \sigma), P_{k|k-1}(c_{k-1}, \sigma))$$

式(5.72)中的求和单元 $i=0$ 为

$$\begin{aligned} \beta_k(0) p(\mathbf{x}_k | \chi_k, \mathbf{Y}^{k-1}) &= \beta_k(0) \sum_{c_{k-1}=1}^{c_{k-1}} p(c_{k-1}) \times \\ &\quad \sum_{\sigma=1}^M \mu_{k|k-1}(c_{k-1}, \sigma) p(\mathbf{x}_k | c_{k-1}, \sigma, \chi_k, \mathbf{Y}^{k-1}) \end{aligned}$$

式(5.72)中的求和单元 $i, i>0$ 为

$$\beta_k(i) p(\mathbf{x}_k | \chi_k, \theta_k(i), \mathbf{Y}^k) = \beta_k(i) p(\mathbf{x}_k | \chi_k, y_k(i), \mathbf{Y}^{k-1})$$

目标轨迹状态概率密度函数 $p(\mathbf{x}_k | \chi_k, y_k(i), \mathbf{Y}^{k-1})$ 由观测 $y_k(i)$ 对预测轨迹状态概率密度函数进行贝叶斯更新获得:

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_k | \chi_k, y_k(i), \mathbf{Y}^{k-1}) &= \frac{p(y_k(i) | \chi_k, \mathbf{x}_k, \mathbf{Y}^{k-1}) p(\mathbf{x}_k | \chi_k, \mathbf{Y}^{k-1})}{p(y_k(i) | \chi_k, \mathbf{Y}^{k-1})} \\ &= \frac{p(y_k(i) | \mathbf{x}_k)}{p_k(i)} \sum_{c_{k-1}=1}^{c_{k-1}} \sum_{\sigma=1}^M p(c_{k-1}) \mu_{k|k-1}(c_{k-1}, \sigma) p(\mathbf{x}_k | c_{k-1}, \sigma, \chi_k, \mathbf{Y}^{k-1}) \end{aligned}$$

进一步使用贝叶斯公式可得

$$\begin{aligned} p(y_k(i) | \mathbf{x}_k) p(\mathbf{x}_k | c_{k-1}, \sigma, \chi_k, \mathbf{Y}^{k-1}) &= p(y_k(i) | \mathbf{x}_k) p(\mathbf{x}_k | c_{k-1}, \sigma, \chi_k, \mathbf{Y}^{k-1}) \frac{p(y_k(i) | c_{k-1}, \sigma, \chi_k, \mathbf{Y}^{k-1})}{p(y_k(i) | c_{k-1}, \sigma, \chi_k, \mathbf{Y}^{k-1})} \\ &= p_k(i, c_{k-1}, \sigma) p(\mathbf{x}_k | c_{k-1}, \sigma, \chi_k, y_k(i), \mathbf{Y}^{k-1}) \end{aligned}$$

于是, 对于 $i>0$, 有

$$\beta_k(i) p(\mathbf{x}_k | \chi_k, \theta_k(i), \mathbf{Y}^k) = \beta_k(i) \sum_{c_{k-1}=1}^{c_{k-1}} p(c_{k-1}) \times$$

$$\sum_{\sigma=1}^M \mu_{k|k-1}(c_{k-1}, \sigma) \frac{p_k(i, c_{k-1}, \sigma)}{p_k(i)} p(\mathbf{x}_k | \chi_k, c_{k-1}, \sigma, \theta_k(i), \mathbf{Y}^k)$$

其中, $p(\mathbf{x}_k | \chi_k, c_{k-1}, \sigma, \theta_k(i), \mathbf{Y}^k)$ 可通过对预测轨迹状态概率密度函数 $p(\mathbf{x}_k | \chi_k, c_{k-1}, \sigma, \mathbf{Y}^{k-1})$ 使用观测 $\mathbf{y}_k(i)$ 进行更新(卡尔曼滤波更新)而得。

每一对先验分量 c_{k-1} 和预选观测 $i, i \geq 0$ 组成一个新的后验暂时分量, 记为 $\tilde{c}_k \triangleq \{c_{k-1}, \theta_k(i)\}$, 式(5.72)可写为

$$p(\mathbf{x}_k | \chi_k, \mathbf{Y}^k) = \sum_{c_k=1}^{\tilde{c}_k} p(\tilde{c}_k) \cdot \sum_{\sigma=1}^M \mu_{k|k}(\tilde{c}_k, \sigma) p(\mathbf{x}_k | \tilde{c}_k, \sigma, \chi_k, \mathbf{Y}^k)$$

其中

$$p(\mathbf{x}_k | \tilde{c}_k, \sigma, \chi_k, \mathbf{Y}^k) = N(\hat{\mathbf{x}}_{k|k}(\tilde{c}_k, \sigma), \mathbf{P}_{k|k}(\tilde{c}_k, \sigma))$$

于是, 对于 $\tilde{c}_k = \{c_{k-1}, \theta_k(0)\}$ 有

$$p(\tilde{c}_k) \mu_{k|k}(\tilde{c}_k, \sigma) = \beta_k(0) p(c_{k-1}) \mu_{k|k-1}(c_{k-1}, \sigma)$$

和

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{k|k}(\tilde{c}_k, \sigma) &= \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}(c_{k-1}, \sigma) \\ \mathbf{P}_{k|k}(\tilde{c}_k, \sigma) &= \mathbf{P}_{k|k-1}(c_{k-1}, \sigma) \end{aligned}$$

给定 $\tilde{c}_k = \{c_{k-1}, i\}, i > 0$, 有

$$p(\tilde{c}_k | \chi_k, \mathbf{Y}^k) \mu_{k|k}(\tilde{c}_k, \sigma) = \beta_k(i) p(c_{k-1}) \mu_{k|k-1}(c_{k-1}, \sigma) \frac{p_k(i, c_{k-1}, \sigma)}{p_k(i)}$$

和

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_k | \tilde{c}_k, \sigma, \chi_k, \mathbf{Y}^k) &\triangleq p(\mathbf{x}_k | c_{k-1}, \sigma, \chi_k, \mathbf{y}_k(i), \mathbf{Y}^{k-1}) \\ &= N(\mathbf{x}_k; \hat{\mathbf{x}}_{k|k}(\tilde{c}_k, \sigma), \mathbf{P}_{k|k}(\tilde{c}_k, \sigma)) \end{aligned}$$

$\hat{\mathbf{x}}_{k|k}(\tilde{c}_k, \sigma)$ 和 $\mathbf{P}_{k|k}(\tilde{c}_k, \sigma)$ 的值可以用观测 $\mathbf{y}_k(i)$ 对预测均值 $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}(c_{k-1}, \sigma)$ 和协方差 $\mathbf{P}_{k|k-1}(c_{k-1}, \sigma)$ 进行卡尔曼滤波更新而得:

$$[\hat{\mathbf{x}}_{k|k}(\tilde{c}_k, \sigma), \mathbf{P}_{k|k}(\tilde{c}_k, \sigma)] = \text{KF}_E[\mathbf{y}_k(i), \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}(c_{k-1}, \sigma), \mathbf{P}_{k|k-1}(c_{k-1}, \sigma), \mathbf{H}, \mathbf{R}]$$

式中: KF_E 是卡尔曼滤波估计, 其定义见 2.2.1 节。

因此, 对于每一个分量 $\tilde{c}_k = \{c_{k-1}, i \geq 0\}$, 有

$$\begin{aligned} &p(\tilde{c}_k | \chi_k, \mathbf{Y}^k) \mu_{k|k}(\tilde{c}_k, \sigma) \\ &= \beta_k(i) p(c_{k-1}) \mu_{k|k-1}(c_{k-1}, \sigma) \begin{cases} 1 & i = 0 \\ \frac{p_k(i, c_{k-1}, \sigma)}{p_k(i)} & i > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

对目标模型的概率求和, 得到每个分量的后验概率为

$$p(\tilde{c}_k | \chi_k, \mathbf{Y}^k) = \sum_{\sigma=1}^M p(\tilde{c}_k | \chi_k, \mathbf{Y}^k) \mu_{k|k}(\tilde{c}_k, \sigma)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\sigma=1}^M \beta_k(i) p(c_{k-1}) \mu_{k|k-1}(c_{k-1}, \sigma) \begin{cases} 1 & i = 0 \\ \frac{p_k(i, c_{k-1}, \sigma)}{p_k(i)} & i > 0 \end{cases} \\
&= \beta_k(i) p(c_{k-1}) \begin{cases} 1 & i = 0 \\ \frac{p_k(i, c_{k-1})}{p_k(i)} & i > 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

然后, 给定后验分量, 可直接求得目标模型的后验概率为

$$\begin{aligned}
\mu_{k|k}(\tilde{c}_k, \sigma) &\triangleq p(M_k = \sigma | \tilde{c}_k, \chi_k, Y^k) \\
&= \frac{p(\tilde{c}_k | \chi_k, Y^k) \mu_{k|k}(\tilde{c}_k, \sigma)}{p(\tilde{c}_k | \chi_k, Y^k)} \\
&= \mu_{k|k-1}(c_{k-1}, \sigma) \begin{cases} 1 & i = 0 \\ \frac{p_k(i, c_{k-1}, \sigma)}{p_k(i, c_{k-1})} & i > 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

每个暂时分量 \tilde{c}_k 的后验轨迹状态概率密度函数为

$$p(x_k | \tilde{c}_k, \chi_k, Y^k) = \sum_{\sigma=1}^M \mu_{k|k}(\tilde{c}_k, \sigma) p(x_k | \tilde{c}_k, \sigma, \chi_k, Y^k)$$

给定暂时后验分量 \tilde{c}_k 和目标模型 σ 的每个后验轨迹状态条件概率密度函数均为高斯概率密度函数:

$$p(x_k | \tilde{c}_k, \sigma, \chi_k, Y^k) = N(x_k; \hat{x}_{k|k}(\tilde{c}_k, \sigma), P_{k|k}(\tilde{c}_k, \sigma))$$

其均值和协方差为

$$\begin{aligned}
&[\hat{x}_{k|k}(\tilde{c}_k, \sigma), P_{k|k}(\tilde{c}_k, \sigma)] \\
&= \begin{cases} [\hat{x}_{k|k-1}(c_{k-1}, \sigma), P_{k|k-1}(c_{k-1}, \sigma)] & i = 0 \\ \text{KF}_E[y_k(i), \hat{x}_{k|k-1}(c_{k-1}, \sigma), P_{k|k-1}(c_{k-1}, \sigma), H, R] & i > 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

给定

$$\sum_{i=0}^{m_k} \beta_k(i) = \sum_{c_{k-1}=1}^{c_{k-1}} p(c_{k-1}) = \sum_{\sigma=1}^M \mu_{k|k-1}(c_{k-1}, \sigma) = 1$$

直接可证实

$$\sum_{c_k=1}^{\tilde{c}_k} p(\tilde{c}_k) = \sum_{\sigma=1}^M \mu_{k|k}(\tilde{c}_k, \sigma) = 1$$

5.5 最优航迹更新过程

本章所述目标跟踪算法均为递推算法, 这里只给出一个周期的更新过程, 对于每个存在的航迹均重复这一过程。航迹初始化问题将在 9.4 节叙述。

所有目标跟踪算法均遵循相同的更新周期。本节给出适用两种情况的最优航迹更新过程:单目标跟踪和多目标跟踪。这里使用最为通用的轨迹概率密度函数形式:多分量且每个分量又使用多个目标模型的 IMM 估计器。除了数据关联,单目标跟踪和多目标跟踪共用所有其他跟踪处理过程。

单目标跟踪的数据关联或许也可以从多目标跟踪的数据关联推广得到,即限制航迹个数为 1。然而,为了使概念清晰易懂,这里对单目标跟踪和多目标跟踪的数据关联问题分开阐述。

在 5.7 节和 5.8 节分别进行详细阐述的单目标跟踪算法和多目标跟踪算法都可以通过对本节叙述的最优航迹更新过程进行次优或特殊限定而获得。

k 时刻的航迹更新过程从当前一批观测 \mathbf{Y}_k 到达开始,每条航迹 τ 在 $k-1$ 时刻的后验状态 $p(\mathbf{x}_{k-1}^\tau, \chi_{k-1}^\tau | \mathbf{Y}^{k-1})$ 为已知量,并经 $k-1$ 时刻到 k 时刻的演化(预测)而得到 $p(\mathbf{x}_k^\tau, \chi_k^\tau | \mathbf{Y}^{k-1})$ 。

k 时刻每条航迹选择观测的一个子集 \mathbf{y}_k^τ 以更新航迹的状态,这一步骤中同时也计算每个观测的似然函数 $p(\mathbf{y}_k(i) | \chi_k^\tau, \mathbf{Y}^{k-1}), i=1, \cdots, m_k$ 。

数据关联则利用观测的似然信息更新每条航迹的目标存在概率($p(\chi_k^\tau | \mathbf{Y}^k)$),并计算假定目标存在的后验数据关联条件概率 $\beta_k^\tau(i) \triangleq p(\theta_k^\tau(i) | \chi_k^\tau, \mathbf{Y}^k), i=1, \cdots, m_k^\tau$ 。

航迹的轨迹状态概率密度函数 $p(\mathbf{x}_k^\tau | \chi_k^\tau, \mathbf{Y}^k)$ 利用预测的轨迹状态概率密度函数 $p(\mathbf{x}_k^\tau | \chi_k^\tau, \mathbf{Y}^{k-1})$ 、预选观测 \mathbf{y}_k^τ 以及后验数据关联概率 β_k^τ 计算。

k 时刻的跟踪输出由后验航迹状态 $p(\mathbf{x}_k^\tau, \chi_k^\tau | \mathbf{Y}^k)$ 计算,通常包括航迹状态(如暂时、确认或终止)以及目标轨迹状态均值 $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^\tau$ 和协方差 $\mathbf{P}_{k|k}^\tau$ 。跟踪输出给跟踪器的外部终端(如操作员、融合中心等)使用,而不在后续更新周期中使用。

表 5.4 给出了一个跟踪周期的更新过程。这里注意预测、选择、估计以及跟踪输出操作均在各条航迹上单独执行,在硬件许可的情况下可对不同航迹并行执行这些操作。单目标跟踪的数据关联操作也可以对各条航迹单独执行,但是多目标情况则需对所有航迹(聚类内航迹,如 5.5.4 节所述)同时处理。因此,除了多目标跟踪的数据关联,在叙述其他所有操作时均省去航迹上标。

表 5.4 基于目标存在性的跟踪更新周期

操作	输入	输出
扫描 $k-1$		$p(\mathbf{x}_{k-1}, \chi_{k-1} \mathbf{Y}^{k-1})$
预测	$p(\chi_{k-1} \mathbf{Y}^{k-1}), p(\mathbf{x}_{k-1} \chi_{k-1}, \mathbf{Y}^{k-1})$	$p(\chi_k \mathbf{Y}^{k-1}), p(\mathbf{x}_k \chi_k, \mathbf{Y}^{k-1})$
选择	$\mathbf{Y}^k, p(\mathbf{x}_k \chi_k, \mathbf{Y}^{k-1})$	$\mathbf{y}^k, p(\mathbf{y}_k(i) \chi_k, \mathbf{Y}^{k-1})$
数据关联	$p(\chi_k \mathbf{Y}^{k-1}), p(\mathbf{y}_k(i) \chi_k, \mathbf{Y}^{k-1})$	$p(\chi_k \mathbf{Y}^k), \beta_k(i)$
估计	$\mathbf{y}_k, \beta_k(i), p(\mathbf{x}_k \chi_k, \mathbf{Y}^{k-1})$	$p(\mathbf{x}_k \chi_k, \mathbf{Y}^k)$
跟踪输出	$p(\chi_k \mathbf{Y}^k), p(\mathbf{x}_k \chi_k, \mathbf{Y}^k)$	status, $\hat{\mathbf{x}}_{k k}, \mathbf{P}_{k k}$

5.5.1 航迹状态预测

航迹状态预测包括目标存在概率以及目标轨迹状态概率密度函数从 $k-1$ 时刻到 k 时刻的演化。

k 时刻航迹状态预测操作的输入是:

(1) $k-1$ 时刻目标存在的后验概率 $p(\chi_{k-1} | Y^{k-1})$ 。

(2) $k-1$ 时刻目标轨迹状态的后验概率密度函数 $p(\mathbf{x}_{k-1} | \chi_{k-1}, Y^{k-1})$, 它由以下参数给出:

① 航迹分量 c_{k-1} 的集合;

② 每个航迹分量 c_{k-1} 的相对概率, $p(c_{k-1}) \triangleq p(\xi_{k-1}(c_{k-1}) | \chi_{k-1}, Y^{k-1})$;

③ IMM 后验概率密度函数, 其对应参数有目标模型概率 $\mu_{k-1|k-1}(c_{k-1}, \sigma)$ 以及每个目标模型对应的均值 $\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}(c_{k-1}, \sigma)$ 和协方差矩阵 $\mathbf{P}_{k-1|k-1}(c_{k-1}, \sigma)$ 。

k 时刻航迹状态预测操作的输出是:

(1) k 时刻目标存在的先验概率 $p(\chi_k | Y^{k-1})$ 。

(2) k 时刻目标轨迹状态的先验概率密度函数 $p(\mathbf{x}_k | \chi_k, Y^{k-1})$, 它由以下参数给出:

① 航迹分量 c_{k-1} 的集合, 预测后没有改变;

② 每个航迹分量 c_{k-1} 的相对概率 $p(c_{k-1})$, 预测后不变, $p(\xi_{k-1}(c_{k-1}) | \chi_k, Y^{k-1}) = p(c_{k-1})$;

③ IMM 先验概率密度函数, 其对应参数有目标模型概率 $\mu_{k|k-1}(c_{k-1}, \sigma)$ 以及每个目标模型对应的均值 $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}(c_{k-1}, \sigma)$ 和协方差矩阵 $\mathbf{P}_{k|k-1}(c_{k-1}, \sigma)$ 。

这里使用了 5.4.1 节中的结果。目标存在概率以马尔可夫链进行传递(见 5.3.1 节):

$$p(\chi_k | Y^{k-1}) = \text{TEX}_p[p(\chi_{k-1} | Y^{k-1}), \gamma]$$

预测的 k 时刻目标轨迹状态的概率密度函数是各分量预测概率密度函数的混合:

$$p(\mathbf{x}_k | \chi_k, Y^{k-1}) = \sum_{c_{k-1}=1}^{c_{k-1}} p(c_{k-1}) p(\mathbf{x}_k | c_{k-1}, \chi_k, Y^{k-1}) \quad (5.73)$$

式中: $p(c_{k-1})$ 为各航迹分量的相对概率; $p(\mathbf{x}_k | c_{k-1}, \chi_k, Y^{k-1})$ 是航迹分量的预测概率密度函数。每个分量的预测概率密度函数又是各模型预测状态概率密度函数的混合, 给定分量及各目标模型 σ , 有

$$\begin{cases} p(\mathbf{x}_k | c_{k-1}, \chi_k, Y^{k-1}) = \sum_{\sigma=1}^M \mu_{k|k-1}(c_{k-1}, \sigma) p(\mathbf{x}_k | c_{k-1}, \sigma, \chi_k, Y^{k-1}) \\ p(\mathbf{x}_k | c_{k-1}, \sigma, \chi_k, Y^{k-1}) = N(\mathbf{x}_k; \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}(c_{k-1}, \sigma), \mathbf{P}_{k|k-1}(c_{k-1}, \sigma)) \end{cases} \quad (5.74)$$

换句话说, 航迹状态预测由每个航迹分量的预测组成。每个航迹分量 c_{k-1} 的状态是一个 IMM 块, 由 IMM 混合与预测操作完成演化(见 3.4.1 节):

$$[\{\mu_{k|k-1}(c_{k-1}, \sigma), \hat{x}_{k|k-1}(c_{k-1}, \sigma), P_{k|k-1}(c_{k-1}, \sigma)\}_{\sigma}]$$

$$= \text{IMM}_{\text{MP}}[\{\mu_{k-1|k-1}(c_{k-1}, \sigma), \hat{x}_{k-1|k-1}(c_{k-1}, \sigma), P_{k-1|k-1}(c_{k-1}, \sigma), F_{\sigma}, Q_{\sigma}\}_{\sigma}, \Gamma]$$

若目标模型个数为 1, $M = 1$, 则 IMM 混合与预测操作则退化为卡尔曼滤波器的预测操作, 正如 JITS、JIPDA、JPDA、ITS、IPDA 和 PDA 等算法中的情形, 对每条航迹的每个分量有

$$[\hat{x}_{k|k-1}(c_{k-1}, \sigma), P_{k|k-1}(c_{k-1}, \sigma)] = \text{KF}_P[\hat{x}_{k-1|k-1}(c_{k-1}), P_{k-1|k-1}(c_{k-1}), F, Q]$$

航迹状态演化参数, γ 、 Γ 、 F 和 Q , 取决于采样 $k-1$ 到采样 k 的时间间隔 Δt_k , 2.8 节给出了矩阵 F 和 Q 的一个赋值的例子, 参数 γ 和 Γ 则在 5.3.1 节和 3.4.1 节分别讨论。

5.5.2 观测选择(波门)技术

假定目标存在并被检测, 观测选择(波门)技术选择一个观测子集, 以较高的概率包含目标的检测。此概率称为“波门概率”, 记为 P_c 。出于计算和软件构架的考虑, 观测似然函数的计算实际上通常也在这一步进行。

这些操作对各条航迹分别进行, k 时刻观测选择操作的输入为:

(1) 传感器产生的观测集 Y_k 。

(2) k 时刻目标轨迹状态的先验概率密度函数 $p(x_k | \chi_k, Y^{k-1})$, 在线性系统中, 它由以下参数描述:

① 航迹分量 c_{k-1} 的集合, 对每个分量 c_{k-1} ;

② 每个航迹分量 c_{k-1} 的相对概率 $p(c_{k-1})$;

③ IMM 先验概率密度函数, 其对应参数有目标模型概率 $\mu_{k|k-1}(c_{k-1}, \sigma)$ 以及每个目标模型 σ 对应的均值 $\hat{x}_{k|k-1}(c_{k-1}, \sigma)$ 和协方差矩阵 $P_{k|k-1}(c_{k-1}, \sigma)$ 。

观测选择操作的输出是:

(1) 用来更新航迹的观测子集 y_k , 对每个选中的观测 $y_k(i)$ 。

(2) 观测子集中每个观测 $y_k(i)$ 的似然函数 $p(y_k(i) | \chi_k, Y^{k-1})$, 在线性系统中, 可以参数化为: 给定航迹分量 c_{k-1} , 观测 $y_k(i)$ 的似然函数 $p(y_k(i) | c_{k-1}, \chi_k, Y^{k-1})$ 。它又由以下参数描述: 先验模型概率 $\mu_{k|k-1}(c_{k-1}, \sigma)$ 以及给定分量 c_{k-1} 和模型 σ 的观测似然函数 $p(y_k(i) | c_{k-1}, \chi_k, Y^{k-1})$ 。

在非参数跟踪(没有关于杂波观测密度的先验知识)中, 观测选择的输出还包括:

(1) 每个航迹分量 c_{k-1} 的每个目标模型 σ 的预选波门的体积 $V_k(c_{k-1}, \sigma)$;

(2) 每个航迹分量 c_{k-1} 的每个目标模型 σ 选择的观测个数 $m_k(c_{k-1}, \sigma)$ 。

每条航迹有一组航迹分量, 每个分量又对应由 M 个模型组成的 IMM 滤波器组。每个模型 σ 各有一个高斯型目标状态传递概率密度函数 $p(x_k | c_{k-1}, \sigma, Y^{k-1})$, 如式(5.20)和式(5.21)中的每个单元。对每个航迹分量 c_{k-1} 的每个目标模型 σ , 首先计算观测位置的均值和协方差(见 2.2.1 节):

$$[\hat{y}_{k|k-1}(c_{k-1}, \sigma), S_k(c_{k-1}, \sigma)] = \text{MP}[\hat{x}_{k|k-1}(c_{k-1}, \sigma), P_{k|k-1}(c_{k-1}, \sigma), H, R] \quad (5.75)$$

每个航迹分量 c_{k-1} 的每个目标模型 σ 选择的观测构成一个预选观测集 $y_k(c_{k-1}, \sigma)$, 其中元素 y 满足:

$$y_k(c_{k-1}, \sigma) = \{y \in Y_k: [y - \hat{y}_{k|k-1}(c_{k-1}, \sigma)]^T S_k^{-1}(c_{k-1}, \sigma) \times [y - \hat{y}_{k|k-1}(c_{k-1}, \sigma)] \leq g\} \quad (5.76)$$

其中, \sqrt{g} 成为波门大小, 它取决于波门概率 P_G 的大小。记集合 $y_k(c_{k-1}, \sigma)$ 的势为 $m_k(c_{k-1}, \sigma)$ 。分量/模型组合 $\{c_{k-1}, \sigma\}$ 的预选波门体积为

$$\begin{aligned} V_k(c_{k-1}, \sigma) &= \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2 + 1)} \sqrt{g | S_k(c_{k-1}, \sigma) |} \\ &= C_n \sqrt{g | S_k(c_{k-1}, \sigma) |} \end{aligned} \quad (5.77)$$

式中: $\Gamma(\cdot)$ 代表伽马函数; n 为监视区域的维数; C_n 是单位半径 n 维超球面的体积。对于 $n=2$, $C_2 = \pi$; 当 $n=3$, $C_3 = 4\pi/3$ 。

构成式(5.75)和式(5.76)的函数可以写成伪函数

$$[y_k(c_{k-1}, \sigma), V_k(c_{k-1}, \sigma)] = \text{MS}_1[Y_k, \hat{x}_{k|k-1}(c_{k-1}, \sigma), P_{k|k-1}(c_{k-1}, \sigma), H, R] \quad (5.78)$$

航迹的预选观测集由各分量选择的所有观测的并集组成:

$$y_k = \bigcup_{c_{k-1}} \bigcup_{\sigma} y_k(c_{k-1}, \sigma)$$

记它的势为 m_k , 第 i 个元素记为 $y_k(i)$ 。对于非参数化目标跟踪, 还需要预选波门并集的体积, 这个问题更为复杂, 9.3 节给出了一个有效的逼近方法。

观测似然

假定观测是来自目标的检测, 其似然函数表达式的推导已经在 5.4.2 节给出, 这里跳过推导而直接重现结果。

预选观测的似然函数等于它们的先验概率密度函数, 假定它们为源自目标的检测。如果一个观测未被一条航迹、一个分量或者一个模型选中, 则其似然函数为 0。

观测 $y_k(i)$ 对于航迹的似然函数为观测 $y_k(i)$ 在航迹分量层似然函数的均值:

$$p_k(i) \triangleq p(y_k(i) | \chi_k, Y^{k-1}) = \sum_{c_{k-1}=1}^{C_{k-1}} p(c_{k-1}) p_k(i, c_{k-1})$$

而观测在航迹分量层的似然函数又是观测在目标模型层似然函数的均值:

$$p_k(i, c_{k-1}) \triangleq p(y_k(i) | c_{k-1}, \chi_k, Y^{k-1}) = \sum_{\sigma=1}^M \mu_{k|k-1}(c_{k-1}, \sigma) p_k(i, c_{k-1}, \sigma)$$

给定航迹分量 c_{k-1} 和目标模型 σ , 观测 $y_k(i)$ 对于航迹的似然函数最终为

$$[p_k(i, c_{k-1}, \sigma)]_i = \text{ML}_1[\{y_k(i)\}_i, \hat{x}_{k|k-1}(c_{k-1}, \sigma), P_{k|k-1}(c_{k-1}, \sigma), H, R]$$

上式中伪函数 ML_1 的定义在 5.4.2 节给出:

$$p_k(i, c_{k-1}, \sigma) \triangleq p(y_k(i) | c_{k-1}, \sigma, \chi_k, Y^{k-1})$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{P_c} N(y_k(i); \hat{y}_{k|k-1}(c_{k-1}, \sigma), S_k(c_{k-1}, \sigma)) & y_k(i) \in V_k(c_{k-1}, \sigma) \\ 0 & y_k(i) \notin V_k(c_{k-1}, \sigma) \end{cases}$$

目标观测的条件均值和协方差由下式计算:

$$[\hat{y}_{k|k-1}(c_{k-1}, \sigma), S_k(c_{k-1}, \sigma)] = MP[\hat{x}_{k|k-1}(c_{k-1}, \sigma), P_{k|k-1}(c_{k-1}, \sigma), H, R]$$

相关定义在 2.2.1 节给出:

$$\begin{aligned} \hat{y}_{k|k-1}(c_{k-1}, \sigma) &= H\hat{x}_{k|k-1}(c_{k-1}, \sigma) \\ S_k(c_{k-1}, \sigma) &= HP_{k|k-1}(c_{k-1}, \sigma)H^T + R \end{aligned}$$

5.5.3 单目标跟踪数据关联

单目标跟踪数据关联过程利用观测似然函数,不但计算数据关联后验概率,而且还计算目标存在后验概率。5.4.4 节给出了该过程的推导,这里不再重复推导,只重复整理其结果。

单目标跟踪忽略目标的检测被其他航迹跟踪的任何可能性,因此,这些操作可以在各条航迹上独立地进行,从而也有可能并行地实现其计算。

k 时刻数据关联操作的输入为:

- (1) 目标存在的先验概率 $p(\chi_k | Y^{k-1})$;
- (2) 每个预选观测 $y_k(i)$ 的似然函数 $p_k(i)$ 。

数据关联操作的输出是:

- (1) 目标存在的后验概率 $p(\chi_k | Y^k)$;
- (2) 假定目标存在的数据关联后验概率 $\beta_k(i) \triangleq p(\theta_k(i) | \chi_k, Y^k)$, $i = 1, \dots, m_k$ 。这里, $\theta_k(0)$ 表示没有一个预选观测是目标检测的事件; $\theta_k(i)$, $i > 0$ 代表观测 $y_k(i)$ 是源自目标检测的事件。

记 k 时刻观测的似然比为 Λ_k , 有

$$\Lambda_k = 1 - P_D P_c + P_D P_c \sum_{i=1}^{m_k} \frac{p_k(i)}{\rho_k(i)} \quad (5.79)$$

目标存在的后验概率由下式给出:

$$p(\chi_k | Y^k) = \frac{\Lambda_k p(\chi_k | Y^{k-1})}{1 - (1 - \Lambda_k) p(\chi_k | Y^{k-1})} \quad (5.80)$$

数据关联后验概率为

$$\beta_k(i) \triangleq p(\theta_k(i) | \chi_k, Y^k) = \frac{1}{\Lambda_k} \cdot \begin{cases} 1 - P_D P_c & i = 0 \\ P_D P_c \frac{p_k(i)}{\rho_k(i)} & i > 0 \end{cases} \quad (5.81)$$

记式(5.79)~式(5.81)为一伪函数:

$$[p(\chi_k | Y^k), \{\beta_k(i)\}_{i=0}^{m_k}] = \text{ISTDA}[p(\chi_k | Y^{k-1}), \{P_k(i)\}_{i=1}^{m_k}] \quad (5.82)$$

式(5.79)、式(5.80)和式(5.81)均与目标观测的先验概率密度函数 $p(\chi_k | Y^{k-1})$ 的形状无关,从这一点讲,三个式子是具有普遍意义的。它们不但对于高斯型概率密度函数、高斯混合成立,而且对于一些非线性的概率密度函数(如粒子滤波和其他非线性估计器的产物)也同样适用。

5.5.4 多目标跟踪数据关联

当航迹之间有共用观测,也就是说当一些观测被多条航迹选中时,即出现了多目标跟踪的问题。如果目标(航迹)足够分散而不出现共享观测的情况,那么又回到单目标跟踪的情形。

从计算的角度考虑,每次扫描都按照航迹有共享观测的原则将航迹分在不同的聚类中。共享观测的航迹以及它们选择的观测同属于该聚类。多目标数据关联在聚类中所有航迹上同时进行,而不能并行实现。但是不同聚类上的数据关联操作是独立的,也有可能以并行的方式实现。

以上标 τ 和 η 来区分不同的航迹,本节给出单个聚类中关于所有航迹和观测的数据关联处理过程。5.4.5 节中推导了多目标数据关联,这里只叙述最终的结果。

多目标数据关联操作的输入为:

- (1) 目标存在的先验概率 $p(\chi_k | Y^{k-1})$;
- (2) 每个观测 $y_k(i)$ 相对于每条航迹 τ 的似然函数 $p_k^\tau(i) \triangleq p(y_k(i) | \chi_k^\tau, Y^{k-1})$ 。

对于每条航迹 τ ,数据关联操作的输出是:

- (1) 目标 τ 存在的后验概率 $p(\chi_k^\tau | Y^k)$;
- (2) 假定目标存在的数据关联后验概率 $\beta_k^\tau(i) \triangleq p(\theta_k^\tau(i) | \chi_k^\tau, Y^k), i = 1, \dots, m_k$ 。这里 $\theta_k^\tau(0)$ 表示没有一个预选观测是目标 τ 的检测的事件; $\theta_k^\tau(i), i > 0$ 代表观测 $y_k(i)$ 是源自目标 τ 的检测的事件。

一个联合事件是所有观测到所有航迹的一个分配,一个可行联合事件是满足如下条件的联合事件:

- (1) 每条航迹至多分配到一个观测;
- (2) 每个观测至多分配给一条航迹。

列举所有可行的观测到航迹的联合分配,并计算它们的后验概率。然后用来计算每条航迹的后验数据关联概率以及目标存在的后验概率。

如果至少有一个观测的分配不一样,两个可行联合事件即被认为是两个不同的联合事件。不同可行联合事件相互排斥。对每个联合事件 ε , 定义:

- (1) $T_0(\varepsilon)$: 未分配观测的航迹的集合;

(2) $T_1(\varepsilon)$: 分配到一个观测的航迹的集合;

(3) $i(\tau, \varepsilon)$: 分配给航迹 τ 的观测的编号。

联合事件的后验概率为

$$P(\varepsilon | Y^k) = c_k^{-1} \prod_{\tau \in T_0(\varepsilon)} (1 - P_D^\tau P_G^\tau p(\chi_k^\tau | Y^{k-1})) \times \prod_{\tau \in T_1(\varepsilon)} \left(P_D^\tau P_G^\tau p(\chi_k^\tau | Y^{k-1}) \frac{p_k^\tau(i(\tau, \varepsilon))}{\rho_k(i(\tau, \varepsilon))} \right) \quad (5.83)$$

归一化常量 c_k 可基于可行联合事件相互排斥且构成一个完备集合的事实计算:

$$\sum_{\varepsilon} p(\varepsilon | Y^k) = 1$$

注意对一个空集进行乘操作结果等于 1。

航迹的数据关联概率

一旦可行联合事件的后验概率已知, 即可用其计算每条航迹的目标存在后验概率和数据关联后验概率。

第一步, 计算将一个观测 $i, i \geq 0$ 分配给航迹 τ 的后验概率。将观测 i 分配给航迹 τ 的所有可行联合事件的集合记为 $\Xi(\tau, i)$ 。聚类中没有一个观测是源自航迹 τ 的检测的事件, 是所有没有分配观测给航迹 τ 的联合事件的并:

$$p(\theta_k^\tau(0) | Y^k) = \sum_{\varepsilon \in \Xi(\tau, 0)} p(\varepsilon | Y^k) \quad (5.84)$$

同样的方式, 聚类中观测 $i, i > 0$ 是源自目标 τ 的检测(目标 τ 的检测暗含目标 τ 的存在)的概率为

$$p(\chi_k^\tau, \theta_k^\tau(i) | Y^k) = \sum_{\varepsilon \in \Xi(\tau, i)} p(\varepsilon | Y^k)$$

目标 τ 存在且聚类中没有任何观测是源自目标 τ 的检测的概率为

$$p(\chi_k^\tau, \theta_k^\tau(0) | Y^k) = \frac{(1 - P_D^\tau P_G^\tau) p(\chi_k^\tau | Y^{k-1})}{1 - P_D^\tau P_G^\tau p(\chi_k^\tau | Y^{k-1})} p(\theta_k^\tau(0) | Y^k)$$

不同观测 $i, i \geq 0$ 的事件 $\{\chi_k^\tau, \theta_k^\tau(i)\}$ 相互排斥, 它们的并相当于目标存在的事件。因此, 目标存在的后验概率为

$$p(\chi_k^\tau | Y^k) = \sum_{i=0}^{m_k} p(\chi_k^\tau, \theta_k^\tau(i) | Y^k) \quad (5.85)$$

数据关联概率即为

$$\beta_k^\tau(i) \triangleq p(\theta_k^\tau(i) | \chi_k^\tau, Y^k) = \frac{p(\chi_k^\tau, \theta_k^\tau(i) | Y^k)}{p(\chi_k^\tau | Y^k)}, \quad i \geq 0 \quad (5.86)$$

记式(5.83)~式(5.86)为一伪函数:

$$[\{p(\chi_k^\tau | Y^k), \{\beta_k^\tau(i)\}_{i \geq 0}\}_\tau] = \text{JMTDA}[\{p(\chi_k^\tau | Y^{k-1}), \{p_k^\tau(i)\}_{i > 0}\}_\tau] \quad (5.87)$$

很容易验证,对于只有一条航迹的聚类($T=1$),多目标数据关联恢复成单目标数据关联。

5.5.5 航迹的轨迹更新

这里给出的轨迹更新过程对于单目标跟踪和多目标跟踪具有一样的形式。所有轨迹更新操作均在每条航迹上独立地进行,因此可并行计算。5.4.6节给出了详细的推导,这里只概括最终结果。

航迹的轨迹更新操作包括两个步骤。第一步,建立最大可能精度的轨迹状态的后验概率密度函数,这里称为“分量更新”,此为本节的主题。分量更新步骤会使航迹分量的个数增加 $1+m_k$ 步,这一步建立的航迹分量称为“暂时航迹分量”。

为了避免计算资源耗尽,暂时航迹分量集合将被分量控制过程处理,已产生一个后验航迹分量集合。航迹分量控制将在5.6节详细论述,其结果是次优的目标跟踪算法。

分量更新操作对于每条航迹独立地进行,本节只描述单条航迹的分量更新,并省略航迹上标。

1) 分量更新操作的输入

(1) 用来更新航迹的观测集 y_k , 对于每个预选观测 $y_k(i)$:

① 预选观测 $y_k(i)$ 的先验概率密度函数。

② 观测的似然函数:

相对于航迹 $p_k(i) \triangleq p(y_k(i) | \chi_k, Y^{k-1})$;

相对于航迹分量 $p_k(i, c_{k-1}) \triangleq p(y_k(i) | c_{k-1}, \chi_k, Y^{k-1})$;

相对于目标模型 $p_k(i, c_{k-1}, \sigma) \triangleq p(y_k(i) | c_{k-1}, \sigma, \chi_k, Y^{k-1})$;

假定目标存在的数据关联后验概率 $\beta_k(i) \triangleq p(\theta_k(i) | \chi_k, Y^k)$, $i=0, \dots, m_k$ 。这里 $\theta_k(0)$ 表示没有一个预选观测是目标检测的事件; $\theta_k(i)$, $i>0$ 代表观测 $y_k(i)$ 是源自目标检测的事件。

(2) k 时刻目标轨迹状态的先验概率密度函数 $p(x_k | \chi_k, Y^{k-1})$, 可由以下参数描述:

① 航迹分量集。

② 航迹分量 c_{k-1} 的相对概率 $p(c_{k-1})$ 。

③ IMM 估计器的先验概率密度函数, 可参数化为模型概率 $\mu_{k|k-1}(c_{k-1}, \sigma)$ 、均值 $\hat{x}_{k|k-1}(c_{k-1}, \sigma)$ 以及协方差 $P_{k|k-1}(c_{k-1}, \sigma)$ 。

2) 分量更新操作的输出

k 时刻目标轨迹状态后验概率密度函数 $p(x_k | \chi_k, Y^k)$, 由下述参数描述:

① 暂时航迹分量集。

② 每个暂时航迹分量 \tilde{c}_k 的相对概率 $p(\tilde{c}_k) \triangleq p(\xi_k(\tilde{c}_k) | \chi_k, Y^k)$ 。

③ IMM 估计器的后验概率密度函数, 可参数化为: 每个模型 σ 的模型概率 $\mu_{k|k}(\tilde{c}_k, \sigma)$ 、均值 $\hat{x}_{k|k}(\tilde{c}_k, \sigma)$ 以及协方差 $P_{k|k}(\tilde{c}_k, \sigma)$ 。

每一对先验航迹分量 c_{k-1} 与预选观测 $y_k(i)$ (包括空观测 $i=0$) 构成一个新暂时航迹分量 $\tilde{\xi}_k(\tilde{c}_k)$:

$$\tilde{\xi}_k(\tilde{c}_k) = \{\xi_{k-1}(c_{k-1}), \theta_k(i)\} \quad (5.88)$$

为了节省空间,经常用 \tilde{c}_k 代替 $\tilde{\xi}_k(\tilde{c}_k)$, 于是有 $p(\tilde{c}_k) \triangleq p(\tilde{\xi}_k(\tilde{c}_k) | \chi_k, Y^k)$ 。

暂时航迹分量的个数等于

$$\tilde{C}_k = C_{k-1}(1 + m_k)$$

轨迹状态的后验概率密度函数是所有暂时航迹分量后验概率密度函数的混合:

$$p(x_k | \chi_k, Y^k) = \sum_{\tilde{c}_k=1}^{\tilde{C}_k} p(\tilde{c}_k) p(x_k | \tilde{c}_k, \chi_k, Y^k) \quad (5.89)$$

各暂时航迹分量的后验概率密度函数由下式给出:

$$p(\tilde{c}_k) \triangleq p(\tilde{\xi}_k(\tilde{c}_k) | \chi_k, Y^k) = \beta_k(i) p(c_{k-1}) \cdot \begin{cases} 1 & i = 0 \\ \frac{p_k(i, c_{k-1})}{p_k(i)} & i > 0 \end{cases} \quad (5.90)$$

每个暂时航迹分量 \tilde{c}_k 的后验概率密度函数又是给定目标模型 σ 的轨迹状态后验概率密度函数的混合:

$$p(x_k | \tilde{c}_k, \chi_k, Y^k) = \sum_{\sigma=1}^M \mu_{klk}(\tilde{c}_k, \sigma) p(x_k | \tilde{c}_k, \sigma, \chi_k, Y^k)$$

这里每个暂时航迹分量的后验模型概率为

$$\mu_{klk}(\tilde{c}_k, \sigma) = \mu_{klk-1}(c_{k-1}, \sigma) \cdot \begin{cases} 1 & i = 0 \\ \frac{p_k(i, c_{k-1}, \sigma)}{p_k(i, c_{k-1})} & i > 0 \end{cases} \quad (5.91)$$

单个暂时航迹分量中的目标模型的后验轨迹状态概率密度函数为高斯型概率密度函数:

$$p(x_k | \tilde{c}_k, \sigma, \chi_k, Y^k) = N(x_k; \hat{x}_{klk}(\tilde{c}_k, \sigma), P_{klk}(\tilde{c}_k, \sigma))$$

由其均值和协方差定义:

$$\begin{aligned} & [\hat{x}_{klk}(\tilde{c}_k, \sigma), P_{klk}(\tilde{c}_k, \sigma)] \\ &= \begin{cases} [\hat{x}_{klk-1}(c_{k-1}, \sigma), P_{klk-1}(c_{k-1}, \sigma)] & i = 0 \\ \text{KFE}_E[y_k(i), \hat{x}_{klk-1}(c_{k-1}, \sigma), P_{klk-1}(c_{k-1}, \sigma), H, R] & i > 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (5.92)$$

式中: KF_E 是卡尔曼滤波估计,其定义见 2.2.1 节。如果暂时航迹分量由先验航迹分量 c_{k-1} 和空观测 $i=0$ 组合而成,轨迹更新这一步将不会改变目标模型的均值和协方差。如果暂时航迹分量由先验航迹分量 c_{k-1} 和观测 $y_k(i)$ 组合而成,将用卡尔曼滤波估计计算目标模型的均值和协方差。

给定

$$\sum_{i=0}^{m_k} \beta_k(i) = \sum_{c_{k-1}=1}^{C_{k-1}} p(c_{k-1}) = \sum_{\sigma=1}^M \mu_{k|k-1}(c_{k-1}, \sigma) = 1$$

则很显然有

$$\sum_{c_k=1}^{\tilde{C}_k} p(\tilde{c}_k) = \sum_{\sigma=1}^M \mu_{k|k}(\tilde{c}_k, \sigma) = 1$$

5.5.6 跟踪输出

通常只有确认航迹需要输出,而且往往输出目标轨迹状态位置的估计。特别地,对于多扫描(多分量)目标跟踪器,跟踪输出归结为选择一个最像的航迹分量(类似于最大后验估计, MHT 中常用此方法),或者对所有航迹分量求统计均值(类似于最小均方误差估计(MMSEE))。MAP 技术将可能导致航迹输出在观测与观测之间出现大的跳跃,因此本书作者在大多数情况下选择 MMSEE 方法。

跟踪输出不作为下一个跟踪周期的输入,只为系统操作员、数据融合中心或其他较高层次的信息处理。跟踪输出操作在每条航迹上独立地进行,因此可并行实现。

(1) 跟踪输出操作的输入为,目标轨迹状态的后验概率密度函数 $p(\mathbf{x}_k | \chi_k, Y^k)$,由下述参数描述:

- ① 包含 C_k 个分量 c_k 的暂时航迹分量集。
- ② 每个暂时航迹分量 c_k 的相对概率 $p(c_k) \triangleq p(\xi_k(c_k) | \chi_k, Y^k)$ 。
- ③ IMM 估计器的后验概率密度函数,可参数化为每个模型 σ 的模型概率 $\mu_{k|k}(c_k, \sigma)$ 、均值 $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}(c_k, \sigma)$ 以及协方差 $\mathbf{P}_{k|k}(c_k, \sigma)$ 。

在最优目标跟踪中,后验航迹分量集为暂时航迹分量集,如 5.5.5 节所述。在大多数实际跟踪系统中,5.6 节所述的航迹分量控制将暂时航迹分量集转换为一个最终的后验航迹分量集。

(2) 跟踪输出操作的输出为,目标轨迹状态后验概率密度函数的均值和协方差,即 $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$ 和 $\mathbf{P}_{k|k}$ 。

跟踪输出操作可以对每条航迹独立和并行地进行,以伪函数定义为

$$[\hat{\mathbf{x}}_{k|k}, \mathbf{P}_{k|k}] = \text{GMix}[\{\hat{\mathbf{x}}_{k|k}(c_k, \sigma), \mathbf{P}_{k|k}(c_k, \sigma), p(c_k)\mu_{k|k}(c_k, \sigma)\}_{c_k, \sigma}] \quad (5.93)$$

式中:操作 GMix 已在 3.3.1 节定义,它计算高斯混合概率密度函数的均值和协方差。

5.6 航迹分量控制

如果没有航迹分量控制,分量数目将随时间呈指数增长。记 $k-1$ 时刻后验航

迹分量的个数为 C_{k-1} , k 时刻预选观测的个数为 m_k , 那么 k 时刻暂时航迹分量的个数 \tilde{C}_k 为

$$\tilde{C}_k = (1 + m_k) C_{k-1}$$

航迹分量管理对暂时航迹分量集合进行处理, 产生计算能力容许范围内的后验航迹分量集。

由于此后验航迹分量集偏离了贝叶斯暂时航迹分量集, 因此, 该操作的结果为一种次优目标跟踪滤波器。

(1) k 时刻分量控制操作的输入为, k 时刻目标轨迹状态的暂时概率密度函数 $p(\mathbf{x}_k | \chi_k, \mathbf{Y}^k)$, 包含 \tilde{C}_k 个分量的暂时航迹分量集:

① 每个暂时航迹分量 c_k 的相对概率 $p(c_k) \triangleq p(\xi_k(c_k) | \chi_k, \mathbf{Y}^k)$ 。

② IMM 估计器的后验概率密度函数, 可参数化为每个模型 σ 的模型概率 $\mu_{k|k}(c_k, \sigma)$ 、均值 $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}(c_k, \sigma)$ 以及协方差 $\mathbf{P}_{k|k}(c_k, \sigma)$ 。

(2) k 时刻分量控制操作的输出为, k 时刻目标轨迹状态的后验概率密度函数 $p(\mathbf{x}_k | \chi_k, \mathbf{Y}^k)$, 包含 C_k 个后验航迹分量:

① 每个航迹分量 c_k 的相对概率 $p(\tilde{c}_k) \triangleq p(\xi_k(\tilde{c}_k) | \chi_k, \mathbf{Y}^k)$ 。

② IMM 估计器的后验概率密度函数, 可参数化为每个模型 σ 的模型概率 $\mu_{k|k}(\tilde{c}_k, \sigma)$ 、均值 $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}(\tilde{c}_k, \sigma)$ 以及协方差 $\mathbf{P}_{k|k}(\tilde{c}_k, \sigma)$ 。

许多技术 (Blackman, 1986^[21]; Salmond, 1990^[147]; Blackman 和 Popoli, 1999^[22]; Williams 和 Maybank, 2003^[164]; Bocharadt 等, 2006^[31]) 可以用来进行航迹分量控制:

- (1) 分量合并;
- (2) 树叶裁剪;
- (3) 子树裁剪。

5.6.1 航迹分量合并

分量合并涉及将两个或更多暂时航迹分量合并为一个分量。如果所有暂时航迹分量合并为一个后验航迹分量, 其结果为对每个目标模型用一个高斯概率密度函数逼近轨迹状态的后验概率密度函数, 由此得到基于 PDA 的目标跟踪算法:

- (1) IMM - JITS 和 IMM - ITS 将分别变成 IMM - JIPDA 和 IMM - IPDA。
- (2) JITS 和 ITS 分别变成 JIPDA 和 IPDA。

当航迹分量合并时, 对航迹分量是给定观测序列的目标轨迹状态概率密度函数的解释有可能不正确。此种情况下, 航迹状态分量概率密度函数是给定一组观测序列的目标轨迹状态概率密度函数的逼近。航迹分量仍然保持互斥和完备性, 航迹状态概率密度函数仍然是高斯混合。

航迹分量合并有两部分内容: 一个是航迹分量合并标准 (即如何选择该合并

为一个分量的航迹分量), 另外一个实际的航迹分量合并。

有很多航迹分量合并的标准, 其中一些相当复杂且计算量很大。最近的研究焦点 (Salmond, 1990^[149]; Williams 和 Maybank, 2003^[164]; Bocharadt 等, 2006^[31]) 看起来是合并航迹分量使后验轨迹状态概率密度函数的失真最小。本书作者发现如下一个非常简单但也有效的标准, 虽然它已有几十年的历史 (Singer 等, 1974^[149]):

合并最后 N_m 次扫描中所有具有相同观测历史的暂时航迹分量。

其原因在于观测越“老”, 其“影响”越弱。如 Singer 所述, 即便是一段很短的航迹分量历史 N_m , 也能很好地捕捉观测信息。该标准的一个附带效用是即使仅用最新 N_m 次扫描的观测, 航迹分量的界定依然保持:

$$\xi_k(c_k) = \{\theta_{k-N_m+1}(i_{k-N_m+1}) \cdots \theta_k(i_k)\}$$

下面描述将一组航迹分量 Θ (势为 C_Θ) 合并为一个航迹分量的过程。不管使用什么方法来选择这组航迹分量, 该过程均有效。与使用的航迹分量合并方法有关, 该过程有可能需要重复好几次, 有时还会将合并后的航迹分量与额外的航迹分量进行合并。在基于 PDA 的跟踪算法 (PDA, IPDA, IMM - PDA, IMM - IPDA, JPDA, JIPDA, IMM - JPDA 和 IMM - JIPDA) 中, 所有航迹分量被合并为一个分量, 且有 $C_\Theta = \tilde{C}_k$ 。

令 $\bar{\Theta}$ 代表与 Θ 互补的航迹分量的集合 (势为 $C_{\bar{\Theta}}$)。经过分量合并操作, 所有属于集合 Θ 的航迹分量将被合并航迹分量代替, 记为 $c_k = i_\Theta$ 。航迹分量的总和减为 $C_\Theta = 1$ 。

由于在航迹分量合并之前, 所有分量是互斥的, 因此合并后的航迹分量 i_Θ 与补集 $\bar{\Theta}$ 中的所有航迹分量是互斥的。合并后的航迹分量的相对概率为其“成分”航迹分量相对概率的和:

$$p(i_\Theta) = \sum_{c_k \in \Theta} p(\tilde{c}_k) = 1 - \sum_{c_k \in \bar{\Theta}} p(\tilde{c}_k) \tag{5.94}$$

合并航迹分量的轨迹状态概率密度函数由它的 IMM 参数定义。给定合并航迹分量 i_Θ , 目标模型 σ 的后验概率为

$$\begin{aligned} \mu_{klk}(i_\Theta, \sigma) &\triangleq p(r_k = \sigma \mid i_\Theta, \chi_k, Y^k) \\ &= \frac{p(r_k = \sigma, i_\Theta \mid \chi_k, Y^k)}{p(i_\Theta \mid \chi_k, Y^k)} \\ &= \frac{\sum_{\tilde{c}_k \in \Theta} p(r_k = \sigma \mid \tilde{c}_k, \chi_k, Y^k) p(\tilde{c}_k \mid \chi_k, Y^k)}{p(i_\Theta)}, \end{aligned}$$

式中: 第 2 行为贝叶斯公式; 第 3 行可通过应用全概率定理得到。于是, 有

$$\mu_{klk}(i_\Theta, \sigma) = \frac{\sum_{\tilde{c}_k \in \Theta} \mu_{klk}(\tilde{c}_k, \sigma) p(\tilde{c}_k)}{p(i_\Theta)} \tag{5.95}$$

假定暂时航迹分量集 Θ 和目标模型 σ 是正确的, 定义暂时航迹分量 \tilde{c}_k 正确的相对概率为 $\beta(\tilde{c}_k, \sigma, \Theta) \triangleq p(\tilde{c}_k | \sigma, \Theta, \chi_k, Y^k)$ 。给定 $\tilde{c}_k \in \Theta$, 那么有 $\{\tilde{c}_k, \Theta\} = \{\tilde{c}_k\}$, 且 $\beta(\tilde{c}_k, \sigma, \Theta) \triangleq p(\tilde{c}_k | \sigma, \Theta, \chi_k, Y^k) = \frac{p(\tilde{c}_k, \sigma, \Theta | \chi_k, Y^k)}{p(\Theta, \sigma | \chi_k, Y^k)} = \frac{p(\tilde{c}_k, \sigma | \chi_k, Y^k)}{p(\Theta, \sigma | \chi_k, Y^k)}$, 于是有

$$\beta(\tilde{c}_k, \sigma, \Theta) = \frac{p(\tilde{c}_k)p(\sigma | \tilde{c}_k, \chi_k, Y^k)}{\sum_{\tilde{c}_k \in \Theta} p(\tilde{c}_k)p(\sigma | \tilde{c}_k, \chi_k, Y^k)} = \frac{p(\tilde{c}_k)\mu_{k|k}(\tilde{c}_k, \sigma)}{\sum_{\tilde{c}_k \in \Theta} p(\tilde{c}_k)\mu_{k|k}(\tilde{c}_k, \sigma)} \quad (5.96)$$

给定 IMM 模型(目标模型) σ 与合并航迹分量 i_θ , 目标轨迹状态后验概率密度函数由下式给出:

$$\begin{aligned} p(x_k | i_\theta, \sigma, \chi_k, Y^k) &= \sum_{\tilde{c}_k \in \Theta} p(x_k | \tilde{c}_k, i_\theta, \sigma, \chi_k, Y^k) p(\tilde{c}_k | \sigma, i_\theta, \chi_k, Y^k) \\ &= \sum_{\tilde{c}_k \in \Theta} p(x_k | \tilde{c}_k, \sigma, \chi_k, Y^k) \beta(\tilde{c}_k, \sigma, \Theta) \end{aligned}$$

用单个高斯概率密度函数逼近高斯混合, 上式变成

$$\begin{aligned} p(x_k | i_\theta, \sigma, \chi_k, Y^k) &= \sum_{\tilde{c}_k \in \Theta} \beta(\tilde{c}_k, \sigma, \Theta) N(x_k; \hat{x}_{k|k}(\tilde{c}_k, \sigma), P_{k|k}(\tilde{c}_k, \sigma)) \\ &\approx N(x_k; \hat{x}_{k|k}(i_\theta, \sigma), P_{k|k}(i_\theta, \sigma)) \end{aligned}$$

式中

$$[\hat{x}_{k|k}(i_\theta, \sigma), P_{k|k}(i_\theta, \sigma)] = \text{GMix}[\{\hat{x}_{k|k}(\tilde{c}_k, \sigma), P_{k|k}(\tilde{c}_k, \sigma), \beta(\tilde{c}_k, \sigma, \Theta)\}_{\tilde{c}_k \in \Theta}] \quad (5.97)$$

合并航迹分量 i_θ 由它的相对概率 $p(i_\theta)$ (式(5.94))、每个目标模型 σ 的后验概率 $\mu_{k|k}(i_\theta, \sigma)$ (式(5.95))、目标轨迹状态均值 $\hat{x}_{k|k}(i_\theta, \sigma)$ 和协方差 $P_{k|k}(i_\theta, \sigma)$ (式(5.96)、式(5.97))定义。

很容易验证, 经过航迹分量合并, 有

$$\sum_{c_k=1}^{C_k} p(c_k) = \sum_{\sigma=1}^M \mu_{k|k}(c_k, \sigma) = 1$$

5.6.2 航迹分量树叶和子树的裁剪

到 k 时刻为止的航迹分量可用图形化的方法进行描述。不失普遍性, 这里假设航迹在 $\ell=1$ 时刻由一个观测初始化; 画一张图, 其中每个节点代表一个航迹分量, 并以扫描时间进行分层排列。各层 $\ell=1, \dots, k$ 图形节点为 ℓ 时刻的后验航迹分量 c_ℓ 。从 $\ell-1$ 层到 ℓ 层连线的顶点代表观测(包含空观测), 它们与 $\ell-1$ 层的航迹分量配对组成 ℓ 层的航迹分量。很容易看出此图为一棵树, 由于顶点只从某一层向其下一层发展, 而树中每个节点均只有一个祖先。图 5.5 是一个实例。

树叶裁剪将拥有较低相对概率的单个航迹分量移除。这项技术可单独使用,

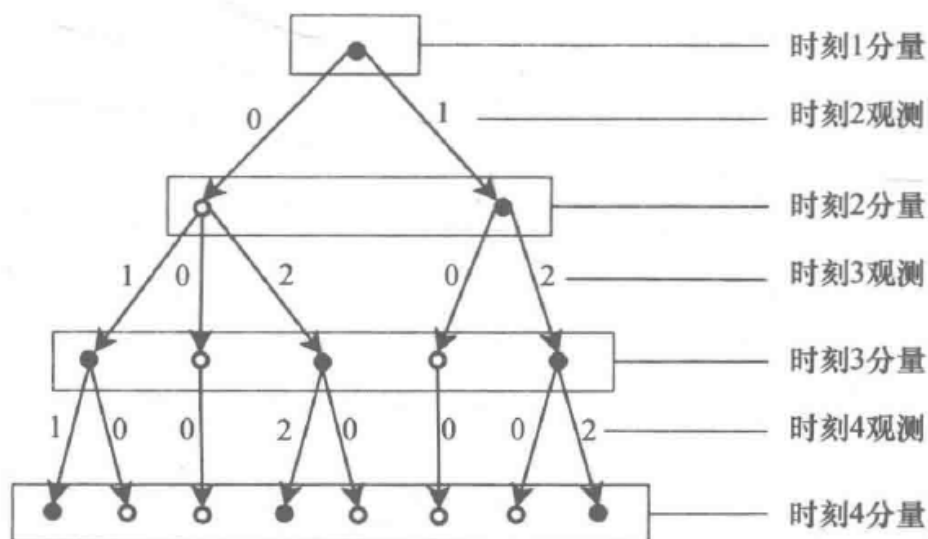


图 5.5 航迹分量树

移除足够多的航迹分量以使分量总数控制在门限之下。如果它与航迹分量合并或航迹分量量子树裁减技术配合使用,它可用来快速(消耗很小计算量)裁减相对概率无关紧要的航迹分量。所有满足 $p(\tilde{c}_k) < \tau_{c,t}$ 的航迹分量均被移除,这里 $\tau_{c,t}$ 为航迹分量终止门限。

由于航迹分量裁剪操作,航迹分量树中的一些节点会被删除。如果 $\ell < k$ 的节点没有子节点,也将从树中移除。于是,航迹分量树中的所有树叶均在 k 层,对应当前航迹分量。图 5.6 中给出了对图 5.5 中航迹分量树裁剪结果的例子。

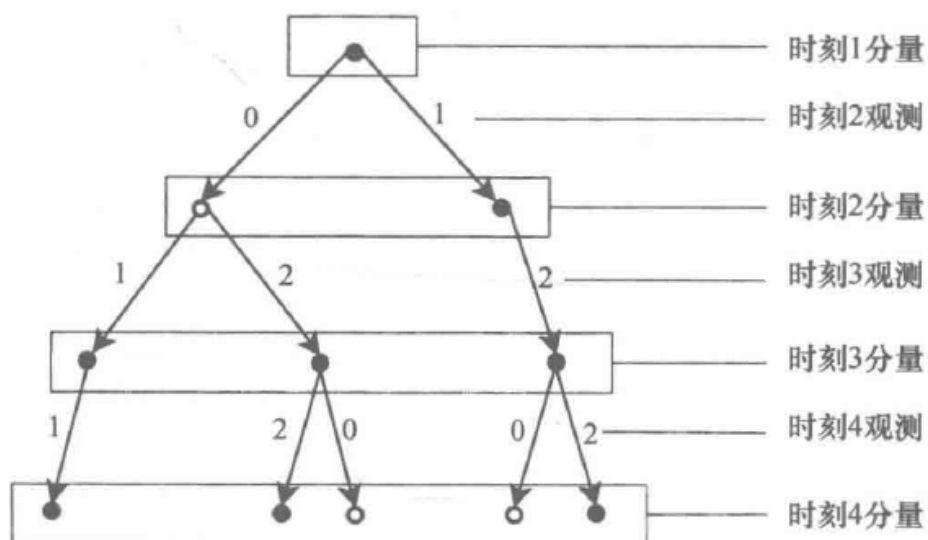


图 5.6 航迹分量树 - 树叶裁剪

k 时刻航迹分量量子树裁剪通常在 $\ell \leq k - N_p$ 层只保留一个航迹分量, N_p 为子树裁剪深度。这也意味着在每一层只有一个观测 $y_\ell(i_\ell)$ 被保留下来作为可能的目标的检测。这一过程有时也称为观测分配延时决策。图 5.7 为对图 5.5 中航迹分量树进行子树裁剪的一个例子。

记包含观测 $y_\ell(i_\ell)$ 的航迹分量集合为 $\gamma(\ell, i_\ell)$:

$$\gamma(\ell, i_\ell) = \{\tilde{\xi}_k(\tilde{c}_k) : \theta_\ell(i_\ell) \in \tilde{\xi}_k(\tilde{c}_k)\}$$

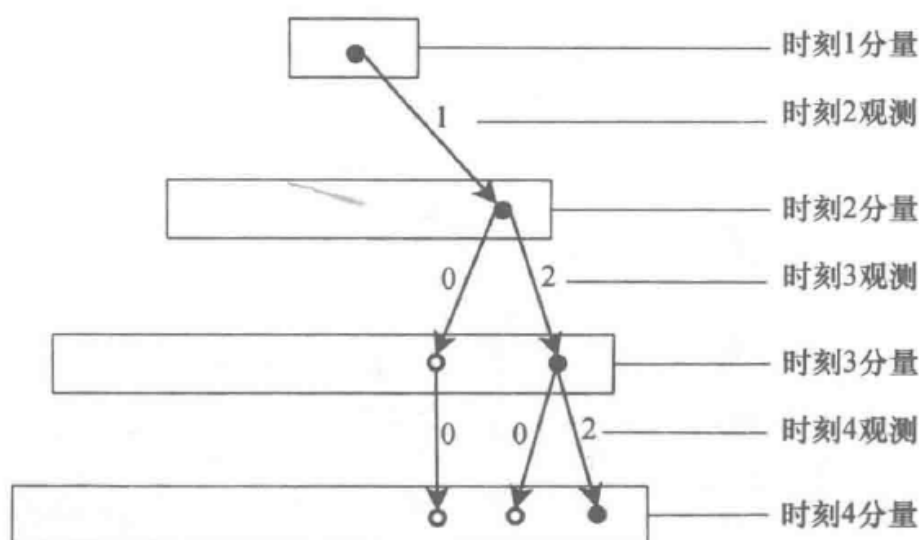


图 5.7 航迹分量树 - 子树裁剪

在 k 时刻, 观测 $y_\ell(i_\ell)$ 是目标检测的相对概率是包含观测 $y_\ell(i_\ell)$ 的所有航迹分量的后验概率的和:

$$p(\theta_\ell(i_\ell) | \chi_k, Y^k) = \sum_{\tilde{c}_k \in \gamma(\ell, i_\ell)} p(\tilde{c}_k)$$

观测 $y_\ell(i_\ell)$ 是目标检测的绝对概率为

$$p(\theta_\ell(i_\ell), \chi_k | Y^k) = p(\chi_k | Y^k) \sum_{\tilde{c}_k \in \gamma(\ell, i_\ell)} p(\tilde{c}_k)$$

在单目标跟踪中, 通常在每一层中只有拥有最高相对概率的观测才被保留, 其他观测则被子树裁剪技术删除 (延时 N_p 次扫描)。

在多目标跟踪中, 在航迹子树第 ℓ 层被保留观测的选择通过基于绝对观测概率的优化算法解决。一个明显的优化约束是, 一个观测只能分配给一条航迹, 空观测除外。拍卖优化算法经常用来分配观测, 其详细介绍超出了本书的范畴, 感兴趣的读者可参阅 Blackman 和 Popli (1999^[22]) 撰写的图书。

在航迹分量树叶裁剪和航迹分量子树裁剪中, 均有一个分量子集 Θ 得以保留, 而其补集 $\bar{\Theta}$ 则被删除

$$\{c_k\} = \{\tilde{c}_k : \tilde{c}_k \in \Theta\}$$

记子集 $\bar{\Theta}$ 的相对概率为 ΔP , 有

$$\Delta P = \sum_{\tilde{c}_k \in \bar{\Theta}} p(\tilde{c}_k)$$

剩余分量的相对概率必须调整为

$$p(c_k) = p(\tilde{c}_k) / (1 - \Delta P)$$

目标存在的概率也应调整为

$$p(\chi_k | Y^k) = p(\chi_k | Y^k) (1 - \Delta P)$$

很容易验证, 经过航迹分量裁剪, 下式成立:

$$\sum_{c_k=1}^{C_k} p(c_k) = \sum_{\sigma=1}^M \mu_{k|k}(c_k, \sigma) = 1$$

5.7 基于目标存在性的单目标跟踪

本节介绍基于目标存在的单目标跟踪算法,从最简单的概率数据互联(PDA)算法到最复杂的交互式多模型-集成航迹分裂(IMM-ITS)算法。

不同算法定义的航迹状态由对 5.3 节定义的通用跟踪模型做不同特殊化而得。特殊化界定可能是只存在一个目标模型(无机动模型)、将所有航迹分量合并成一个分量(单扫描跟踪),或者假设目标存在(目标确定性存在)。

这些算法都是递归的,从之前 $k-1$ 时刻的航迹状态概率密度函数开始,传感器提供的 k 时刻的观测被用来计算更新的航迹状态概率密度函数。对每个算法这里只给出一个周期的更新过程。新航迹起始对于所有算法来说基本类似,将在 9.4 节单独介绍。

在某些场合,这些算法将有一些不同于它们原始发表的版本,如 PDA 就是其中之一,不同之处会有适时的提醒。

由于每个算法有可能是对另一个算法作一些特殊界定的产物,因此不同的算法之间会出现相当一部分的重复。本节的意图是简要地介绍各个算法并给出算法相对于最优目标跟踪算法的特殊化界定。读者只需阅读和理解本算法,而没有必要先去理解其他算法。

5.7.1 概率数据互联

概率数据互联(PDA)是一个杂波环境单非机动目标状态的单次扫描估计器,由 Bar-Shalom 和 Tse 首次提出(1975^[10]),本书在第 4 章已作介绍。由于仅靠非常少的计算即可实现相当密集杂波环境下的目标状态估计,PDA 一经提出即成为一个流行的选择。PDA 是本章介绍的各种算法中最简单的一个。得益于其简单的算法结构,它也是本章所有算法中计算效率最高的一个。然而,PDA 不能提供关于目标是否存在的概率以在虚假航迹剔除中作为航迹质量的评价指标。其隐含地假设目标确定存在,目标存在性的概率始终保持为 1。PDA 对各条航迹进行独立的预测和更新,也就是说当处理某一条航迹时,其他的航迹被置之不理,并且:

(1) 假设目标必须存在,也就是说目标存在性概率等于 1,不会改变,即

$$p(\chi_{k-1} | Y^{k-1}) = p(\chi_k | Y^{k-1}) = p(\chi_k | Y^k) = 1$$

(2) 假设目标不会机动,也就是说,目标只遵循一个目标模型(模型个数为 $M=1$),即

$$\mu_{k-1|k-1}(1) = \mu_{k|k-1}(1) = \mu_{k|k}(1) = 1$$

(3) PDA 是一个单扫描跟踪算法,也就是说,所有的暂时航迹分量均被合并

为一个分量(先验航迹分量和后验航迹分量的个数均等于 1, $C_{k-1} = C_k = 1$), 并且先验概率密度函数和后验概率密度函数均由单个高斯概率密度函数逼近:

$$p(c_{k-1}) = p(c_k) = 1$$

由于只有一个目标模型, 因此给定目标模型 σ 的条件将被约去, 对于航迹状态分量也是一样:

$$\begin{aligned} p(\cdot | \sigma, \cdot) &= p(\cdot | \cdot) \\ p(\cdot | c_{k-1}, \cdot) &= p(\cdot | \cdot) \end{aligned}$$

例如

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_k | \chi_k, \mathbf{Y}^{k-1}) &= p(\mathbf{x}_k | c_{k-1}, \chi_k, \mathbf{Y}^{k-1}) = p(\mathbf{x}_k | c_{k-1}, \sigma, \chi_k, \mathbf{Y}^{k-1}) \\ p_k(i) &= p_k(i, c_k - 1) = p_k(i, c_{k-1}, \sigma) \end{aligned}$$

5.6 节中的航迹分量控制是 PDA 算法的一个集成的部分, 所有暂时航迹分量被合并为一个分量, 而航迹更新操作变成 PDA 估计, 4.3 节给出了详细介绍。

原始的 PDA 算法(Bar-Shalom 和 Tse, 1975^[10]), 见 4.3.1 节, 假设杂波观测密度恒定。在 5.5.3 节对 PDA 公式做了一些调整, 从而可应对非均匀杂波观测密度。当杂波观测密度理想或已知, 或者使用了多扫描杂波估计器时, PDA 也可应用于参数化目标跟踪。

另一方面, 如果杂波观测密度为先验未知(非参数跟踪情况), PDA 使用下式代替式(9.3)作为波门内杂波密度的估计:

$$\rho = m_k / V_k$$

单次扫描的 PDA 递归式在算法 20 中详细给出, 隐式地假设只有一条航迹, 当然, 如果有多条航迹被起始, PDA 递归将对每条存在的航迹重复执行。

算法 20 k 时刻 PDA 滤波递归公式

(1) k 时刻输入:

① 传感器产生的观测集 \mathbf{Y}^k ;

② 航迹状态均值 $\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}$ 与协方差 $\mathbf{P}_{k-1|k-1}$ 。

(2) 预测(见 2.2.1 节和 5.5.1 节):

$$[\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{P}_{k|k-1}] = \text{KF}_p[\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \mathbf{P}_{k-1|k-1}, \mathbf{F}, \mathbf{Q}]$$

(3) 观测选择(见 5.5.2 节式(5.78)):

$$[\mathbf{y}_k, V_k] = \text{MS}_1[\mathbf{Y}_k, \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{P}_{k|k-1}, \mathbf{H}, \mathbf{R}]$$

(4) 所有预选观测 i 的似然函数(见式(5.27)):

$$[\{p_k(i)\}_i] = \text{ML}_1[\{\mathbf{y}_k(i)\}_i, \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{P}_{k|k-1}, \mathbf{H}, \mathbf{R}]$$

(5) **if** 非参数跟踪 **then**

(6) 计算 V_k (见 5.5.2 节式(5.77))。

(7) 杂波观测密度估计(见 9.3 节):

$$\rho = m_k/V_k$$

(8) end if

(9) 单目标数据关联(无目标存在)(见 5.5.3 节):

$$[-, \{\beta_k(i)\}_{i=0}^{m_k}] = \text{ISTDA}[-, \{p_k(i)\}_{i=1}^{m_k}]$$

(10) 估计/合并(见 4.3 节):

$$[\hat{\mathbf{x}}_{k|k}, \mathbf{P}_{k|k}] = \text{PDA}_E[\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{P}_{k|k-1}, \{\mathbf{y}_k(i)\}_{i=1}^{m_k}, \{\beta_k(i)\}_{i=0}^{m_k}, \mathbf{H}, \mathbf{R}]$$

(11) 估计输出:航迹均值 $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$ 和协方差 $\mathbf{P}_{k|k}$ 。

5.7.2 交互式多模型 - 概率数据关联 (IMM - PDA)

交互式多模型 - 概率数据关联 (IMM - PDA) 是 5.7.1 节介绍的 PDA 算法的机动目标拓展。IMM - PDA 是一种杂波环境下的单扫描单机动目标状态估计器。同 PDA 算法一样, IMM - PDA 也不提供关于目标是否存在的概率以在虚假航迹剔除中作为航迹质量的评价指标。其隐式地假设目标确定存在, 目标存在性的概率始终保持为 1。IMM - PDA 对各条航迹进行独立的预测和更新, 也就是说当处理某一条航迹时, 其他的航迹被置之不理, 并且:

(1) 假设目标必须存在, 也就是说目标存在性概率等于 1, 不会改变, 即

$$p(\chi_{k-1} | \mathbf{Y}^{k-1}) = p(\chi_k | \mathbf{Y}^{k-1}) = p(\chi_k | \mathbf{Y}^k) = 1$$

(2) 假设目标可能发生机动, 也就是说, 目标运动可能会在多个模型之间进行切换(目标模型个数 $M \geq 1$)。

(3) IMM - PDA 是一个单扫描跟踪算法, 也就是说, 所有的暂时航迹分量均被合并为一个分量(先验航迹分量和后验航迹分量的个数均等于 1, $C_{k-1} = C_k = 1$), 即

$$p(c_{k-1}) = p(c_k) = 1$$

由于只有一个目标模型, 因此给定目标模型 σ 的条件将被约去, 即

$$p(\cdot | c_{k-1}, \cdot) = p(\cdot | \cdot)$$

例如

$$p(\mathbf{x}_k | \chi_k, \mathbf{Y}^{k-1}) = p(\mathbf{x}_k | c_{k-1}, \chi_k, \mathbf{Y}^{k-1})$$

$$p_k(i, c_{k-1}, \sigma) = p_k(i, \sigma)$$

$$\mu_{k|k}(\bar{c}_k, \sigma) = \mu_{k|k}(i, \sigma)$$

如果目标模型个数等于 1, IMM - PDA 则在概念和算法上完全退回到 PDA。

5.6 节中的航迹分量控制是 PDA 算法的一个集成的部分, 所有暂时航迹分量被合并为一个分量, 而航迹更新操作变成 PDA 估计, 对于每个目标模型 σ 各执行一次。

原始的 IMM - PDA 算法 (Houles 和 Bar - Shalom, 1989^[72]), 以及本书第 4 章的推导, 均假设杂波观测密度恒定。在 5.5.3 节对 IMM - PDA 公式作了一些调整, 从而可应对非均匀杂波观测密度。当杂波观测密度理想或已知, 或者使用了多扫描杂波估计器时, IMM - PDA 也可应用于参数化目标跟踪。

如果杂波观测密度为先验未知 (非参数跟踪情况), IMM - PDA 使用 9.3 节定义的过程估计波门内的杂波密度。由于使用了波门体积的有效估计, 这一点也不同于 IMM - PDA 算法的原始版本。

单次扫描的 IMM - PDA 递归式在算法 21 和算法 22 中详细给出, 隐式地假设只有一条航迹, 当然, 如果有多条航迹被起始, IMM - PDA 递归将对每条存在的航迹重复执行。

算法 21 k 时刻 IMM - PDA 滤波递归公式: 第 1 部分

(1) k 时刻输入:

① 传感器产生的观测集 Y_k 。

② 对于每个目标模型 σ :

$k-1$ 时刻的后验模型概率 $\mu_{k-1|k-1}(\sigma)$;

航迹状态均值 $\hat{x}_{k-1|k-1}(\sigma)$ 与协方差 $P_{k-1|k-1}(\sigma)$ 。

(2) IMM 混合与预测 (见 3.4.1 节和 5.5.1 节):

$$\begin{aligned} & [\{ \mu_{k|k-1}(\sigma), \hat{x}_{k|k-1}(\sigma), P_{k|k-1}(\sigma) \}_{\sigma}] \\ & = \text{IMM}_{\text{MP}} [\{ \mu_{k-1|k-1}(\sigma), \hat{x}_{k-1|k-1}(\sigma), P_{k-1|k-1}(\sigma), F_{\sigma}, Q_{\sigma} \}_{\sigma}, \Gamma] \end{aligned}$$

(3) 观测选择 (见 5.5.2 节式 (5.78)):

$$[y_k(\sigma), V_k(\sigma)] = \text{MS}_1 [Y_k, \hat{x}_{k|k-1}(\sigma), P_{k|k-1}(\sigma), H, R]$$

对于每个 σ

$$y_k = \bigcup_{\sigma} y_k(\sigma)$$

(4) 所有预选观测 $i > 1$ 的似然函数 (见式 (5.27)):

$$[\{ p_k(i, \sigma) \}_i] = \text{ML}_1 [\{ y_k(i) \}_i, \hat{x}_{k|k-1}(\sigma), P_{k|k-1}(\sigma), H, R]$$

对于每个 σ

$$p_k(i) = \sum_{\sigma} \mu_{k|k-1}(\sigma) p_k(i, \sigma)$$

(5) **if** 非参数跟踪 **then**

(6) 由式 (9.6) 计算 V_k (9.3 节)。

(7) 杂波观测密度估计 (9.3 节)。

$$\rho = m_k / V_k$$

(8) **end if**

(9) 单目标数据关联 (无目标存在) (5.5.3 节):

$$[-, \{ \beta_k(i) \}_{i=0}^{m_k}] = \text{ISTDA} [-, \{ p_k(i) \}_{i=1}^{m_k}]$$

算法 22 k 时刻 IMM - PDA 滤波递归公式:第 2 部分

(10) **for** 每个目标模型 σ **do**

(11) 给定观测 $i \geq 0$, 计算后验模型概率 $\mu_{k|k}(i, \sigma)$ (式(5.91)):

$$\mu_{k|k}(i, \sigma) = \mu_{k|k-1}(\sigma) \begin{cases} 1 & i = 0 \\ \frac{p_k(i, \sigma)}{p_k(i)} & i > 0 \end{cases}$$

(12) 后验模型概率 $\mu_{k|k}(\sigma)$ (式(5.95)):

$$\mu_{k|k}(\sigma) = \sum_{i \geq 0} \beta_k(i) \mu_{k|k}(i, \sigma)$$

(13) 后验数据关联概率 $\beta(i, \sigma), i \geq 0$ (式(5.96)):

$$\beta(i, \sigma) = \frac{\beta_k(i)}{\beta_k(0) + \sum_{j>0} \beta_k(j) p_k(j, \sigma) / p_k(j)} \begin{cases} 1 & i = 0 \\ \frac{p_k(i, \sigma)}{p_k(i)} & i > 0 \end{cases}$$

(14) 估计与合并(4.3 节):

$$\begin{aligned} & [\hat{\mathbf{x}}_{k|k}(\sigma), \mathbf{P}_{k|k}(\sigma)] \\ &= \text{PDA}_E[\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}(\sigma), \mathbf{P}_{k|k-1}(\sigma), \{y_k(i)\}_{i=1}^{m_k}, \{\beta_k(i, \sigma)\}_{i=0}^{m_k}, \mathbf{H}, \mathbf{R}] \end{aligned}$$

(15) **end for**

(16) 估计输出:

$$[\hat{\mathbf{x}}_{k|k}, \mathbf{P}_{k|k}] = \text{GMix}[\{\hat{\mathbf{x}}_{k|k}(\sigma), \mathbf{P}_{k|k}(\sigma), \mu_{k|k}(\sigma)\}_{\sigma}]$$

5.7.3 集成概率数据关联(IPDA)

IPDA 是 PDA 算法的一个扩展,增加了目标存在性概率的递归预测与更新,在非参数化情况,使用了不同的改进的杂波观测密度估计方法。

集成概率数据关联(IPDA)是非机动单目标轨迹状态和目标存在性概率的单扫描估计器。由于目标存在性概率为虚假航迹剔除过程提供了工具,IPDA 是一个可作为完整目标跟踪方案基础的最简单的杂波环境下的单目标跟踪算法。IPDA 也是本章算法中概念最简单、计算效率最高的基于随机目标存在性的估计器。因此,它提供了一系列实际系统中杂波环境下目标跟踪的解决方案。

IPDA 对各条航迹进行独立的预测和更新,也就是说当处理某一条航迹时,其他的航迹被置之不理,并且:

(1) 假设目标随机存在并递归估计目标存在性的概率。

(2) 假设目标不会机动,也就是说,目标只遵循一个目标模型(模型个数为 $M=1$):

$$\mu_{k-1|k-1}(1) = \mu_{k|k-1}(1) = \mu_{k|k}(1) = 1$$

(3) IPDA 是一个单扫描跟踪算法,也就是说,所有的暂时航迹分量均被合并

为一个分量(先验航迹分量和后验航迹分量的个数均等于 1,即

$$C_{k-1} = C_k = 1$$

$$p(c_{k-1}) = p(c_k) = 1$$

由于只有一个目标模型,因此给定目标模型 σ 的条件将被约去,对于航迹状态分量也是一样:

$$p(\cdot | \sigma, \cdot) = p(\cdot | \cdot)$$

$$p(\cdot | c_{k-1}, \cdot) = p(\cdot | \cdot)$$

例如

$$p(\mathbf{x}_k | \chi_k, \mathbf{Y}^{k-1}) = p(\mathbf{x}_k | c_{k-1}, \chi_k, \mathbf{Y}^{k-1}) = p(\mathbf{x}_k | c_{k-1}, \sigma, \chi_k, \mathbf{Y}^{k-1})$$

$$p_k(i) = p_k(i, c_{k-1}) = p_k(i, c_{k-1}, \sigma)$$

5.6 节中的航迹分量控制是 PDA 算法的一个集成的部分,所有暂时航迹分量被合并为一个分量,而航迹更新操作变成 PDA 估计,4.3 节给出了详细介绍。

IPDA 最先由 Mušicki(1994^[115])和 Mušicki 等(1994^[129])提出,应对非参数化目标跟踪问题。随后, Mušicki 和 Evans, 2004a^[118]研究了在参数化目标跟踪中使用非均匀杂波密度的 IPDA 方法。

在 5.5.3 节中介绍了当杂波观测密度理想或已知,或者使用了多扫描杂波估计器时,参数化目标跟踪的 IPDA 公式。

如果杂波观测密度为先验未知(非参数跟踪情况),IPDA 如 9.3 节所述估计波门内的杂波密度。

单次扫描的 IPDA 递归式在算法 23 中详细给出,隐式地假设只有一条航迹,当然,如果有多条航迹被起始,IPDA 递归将对每条存在的航迹重复执行。

算法 23 k 时刻 IPDA 滤波递归公式

(1) k 时刻输入:

① 传感器产生的观测集 \mathbf{Y}_k ;

② 目标存在概率 $p(\chi_{k-1} | \mathbf{Y}^{k-1})$ 。

③ 航迹状态均值 $\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}$ 与协方差 $\mathbf{P}_{k-1|k-1}$ 。

(2) 航迹状态传递/预测(见 2.2.1 节和 5.5.1 节):

$$p(\chi_k | \mathbf{Y}^{k-1}) = \gamma_{11} p(\chi_{k-1} | \mathbf{Y}^{k-1})$$

$$[\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{P}_{k|k-1}] = \text{KF}_p[\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \mathbf{P}_{k-1|k-1}, \mathbf{F}, \mathbf{Q}]$$

(3) 观测选择(见 5.5.2 节式(5.78))

$$[\mathbf{y}_k, V_k] = \text{MS}_1[\mathbf{Y}_k, \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{P}_{k|k-1}, \mathbf{H}, \mathbf{R}]$$

(4) 所有预选观测 i 的似然函数(见式(5.27)): $\forall i$

$$[\{p_k(i)\}_i] = \text{ML}_1[\{\mathbf{y}_k(i)\}_i, \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{P}_{k|k-1}, \mathbf{H}, \mathbf{R}]$$

(5) **if** 非参数跟踪 **then**

(6) 计算 V_k (5.5.2 节式(5.77))。

(7) 杂波观测密度估计(9.3 节):

$$\rho = \hat{m}_k / V_k = (m_k - P_D P_C P(\chi_k | Y^{k-1})) / V_k$$

(8) **end if**

(9) 单目标数据关联(无目标存在)(5.5.3 节):

$$[p(\chi_k | Y^k), \{\beta_k(i)\}_{i=0}^{m_k}] = \text{ISTDA}[p(\chi_k | Y^{k-1}), \{p_k(i)\}_{i=1}^{m_k}]$$

(10) 估计/合并(4.3 节):

$$[\hat{x}_{k|k}, P_{k|k}] = \text{PDA}_E[\hat{x}_{k|k-1}, P_{k|k-1}, \{y_k(i)\}_{i=1}^{m_k}, \{\beta_k(i)\}_{i=0}^{m_k}, H, R]$$

(11) 估计输出:航迹均值 $\hat{x}_{k|k}$ 和协方差 $P_{k|k}$ 。

5.7.4 交互式多模型 - 集成概率数据关联 (IMM - IPDA)

交互式多模型 - 集成概率数据关联 (IMM - IPDA) 是 IPDA 算法(5.7.3 节)的机动目标拓展,由 Mušicki(2004a^[118])、Mušicki 和 Suvorova(2008^[125])提出。

IMM - IPDA 是一个杂波环境下单机动目标状态以及目标存在性概率的单扫描递归估计器。IMM - IPDA 对各条航迹进行独立的预测和更新,也就是说,当处理某一条航迹时,其他的航迹被置之不理,并且:

(1) 假设目标随机存在并递归估计目标存在性的概率。

(2) 假设目标可能发生机动,也就是说,目标运动可能在多个模型之间切换(模型个数为 $M \geq 1$)。

(3) IMM - IPDA 是一个单扫描跟踪算法,也就是说,所有的暂时航迹分量均被合并为一个分量(先验航迹分量和后验航迹分量的个数均等于 1,即

$$C_{k-1} = C_k = 1$$

$$p(c_{k-1}) = p(c_k) = 1$$

换句话说,由于只有一个目标模型,因此给定目标模型 σ 的条件将被约去:

$$p(\cdot | c_{k-1}, \cdot) = p(\cdot | \cdot)$$

例如

$$p(x_k | \chi_k, Y^{k-1}) = p(x_k | c_{k-1}, \chi_k, Y^{k-1})$$

$$p_k(i, c_{k-1}, \sigma) = p_k(i, \sigma)$$

$$\mu_{k|k}(\tilde{c}_k, \sigma) = \mu_{k|k}(i, \sigma)$$

如果目标模型个数等于 1, IMM - IPDA 则从概念与算法上退回到 IPDA。

5.6 节中的航迹分量控制是 IMM - IPDA 算法的一个集成的部分,所有暂时航迹分量被合并为一个分量,而航迹更新操作变成 PDA 估计,对于每个目标模型 σ 各执行一次。

在 5.5.3 节中介绍了当杂波观测密度理想或已知,或者使用了多扫描杂波估计器时,参数化目标跟踪的 IMM - IPDA 公式。

另一方面,如果杂波观测密度为先验未知(非参数跟踪情况),IMM-IPDA 如 9.3 节所述估计波门内的杂波密度。

单次扫描的 IMM-IPDA 递归式在算法 24 中详细给出,隐式地假设只有一条航迹,当然,如果有多条航迹被起始,IPDA 递归将对每条存在的航迹重复执行。不难看出,算法 22 中的状态估计更新过程,对于 IMM-PDA 和 IMM-IPDA 是一样的。换句话说,目标轨迹状态与目标存在性概率无关,它是一个预期输出。算法 22 同样在 IMM-JPDA 和 IMM-JIPDA 中具有相同的形式,进一步表明本章各类算法之间的无缝联系。

算法 24 k 时刻 IMM-IPDA 滤波递归公式

(1) k 时刻输入:

① 传感器产生的观测集 Y_k 。

② 目标存在概率 $p(\chi_{k-1} | Y^{k-1})$ 。

③ 对于每个目标模型 σ :

$k-1$ 时刻的后验模型概率 $\mu_{k-1|k-1}(\sigma)$;

航迹状态均值 $\hat{x}_{k-1|k-1}(\sigma)$ 与协方差 $P_{k-1|k-1}(\sigma)$ 。

(2) 航迹状态预测:目标存在性和 IMM 混合与预测(见 3.4.1 节和 5.5.1 节):

$$p(\chi_k | Y^{k-1}) = \gamma_{11} p(\chi_{k-1} | Y^{k-1})$$

$$[\{\mu_{k|k-1}(\sigma), \hat{x}_{k|k-1}(\sigma), P_{k|k-1}(\sigma)\}_{\sigma}]$$

$$= \text{IMM}_{\text{MP}}[\{\mu_{k-1|k-1}(\sigma), \hat{x}_{k-1|k-1}(\sigma), P_{k-1|k-1}(\sigma), F_{\sigma}, Q_{\sigma}\}_{\sigma}, \Gamma]$$

(3) 观测选择(见 5.5.2 节式(5.78)):

$$[y_k(\sigma), V_k(\sigma)] = \text{MS}_1[Y_k, \hat{x}_{k|k-1}(\sigma), P_{k|k-1}(\sigma), H, R]$$

对于每个 σ

$$y_k = \cup_{\sigma} y_k(\sigma)$$

(4) 所有预选观测 $i > 0$ 的似然函数(见式(5.27)):

$$[\{p_k(i, \sigma)\}_i] = \text{ML}_1[\{y_k(i)\}_i, \hat{x}_{k|k-1}(\sigma), P_{k|k-1}(\sigma), H, R]$$

对每个 σ

$$P_k(i) = \sum_{\sigma} \mu_{k|k-1}(\sigma) P_k(i, \sigma)$$

(5) **if** 非参数跟踪 **then**

(6) 计算 V_k (9.3 节式(9.6))。

(7) 杂波观测密度估计(9.3 节):

$$\rho = \hat{m}_k / V_k = (m_k - P_D P_c p(\chi_k | Y^{k-1})) / V_k$$

(8) **end if**

(9) 单目标数据关联(无目标存在)(5.5.3 节):

$$[p(\chi_k | Y^k), \{\beta_k(i)\}_{i=0}^{m_k}] = \text{ISTDA}[p(\chi_k | Y^{k-1}), \{p_k(i)\}_{i=1}^{m_k}]$$

(10) 算法 22 (IMM - PDA 第 2 部分 - 状态估计更新)。

5.7.5 集成航迹分裂 (ITS)

Mušicki 等 (2003^[128], 2007^[131]) 发表了集成航迹分裂 (ITS) 算法。ITS 算法对 IPDA 进行多航迹分量拓展, 或者保留足够的多于一次的观测扫描次数。ITS 能够提供比 IPDA 更好的目标状态估计概率密度函数的逼近, 因此, ITS 在航迹维持、虚假航迹剔除以及目标状态估计上均大大优于 IPDA 算法, 特别是在低检测概率和/或高杂波密度的困难情况下。另一方面, 也会带来一些非正面的影响, ITS 较 IPDA 需要更多的计算资源。这是可调的, 航迹分量控制提供了一个在计算资源和跟踪性能之间的折中机制。

集成航迹分裂 (ITS) 是一个杂波环境非机动目标状态及目标存在性概率的单目标多扫描估计器。

ITS 对各条航迹进行独立的预测和更新, 也就是说, 当处理某一条航迹时, 其他的航迹被置之不理, 并且:

- (1) 假设目标随机存在并递归估计目标存在性的概率。
- (2) 假设目标不会机动, 也就是说, 目标只遵循一个目标模型 (模型个数为 $M=1$):

$$\mu_{k-1|k-1}(c_{k-1}, 1) = \mu_{k|k-1}(c_{k-1}, 1) = \mu_{k|k}(c_{k-1}, 1) = 1$$

- (3) ITS 是一个多扫描跟踪算法, 保留个数为正的航迹分量。

由于只有一个目标模型, 因此给定目标模型 σ 的条件将被约去, 对于航迹状态分量也是一样:

$$p(\cdot | \sigma, \cdot) = p(\cdot | \cdot)$$

例如

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_k | \chi_k, c_{k-1}, Y^{k-1}) &= p(\mathbf{x}_k | \chi_k, c_{k-1}, \sigma, Y^{k-1}) \\ p_k(i, c_{k-1}) &= p_k(i, c_{k-1}, \sigma) \end{aligned}$$

5.6 节中的航迹分量控制是 ITS 算法的一个集成的部分 (虽然严格从理论上说并非必要)。然而, 不同于 IPDA 算法, 系统设计者享有对航迹分量控制以及保留航迹分量的个数的绝对自由 (当然, 受限于计算资源)。如果航迹分量控制到达极限, 所有暂时航迹分量被合并为一个分量, ITS 恢复到 IPDA。

5.5.3 节中介绍了当杂波观测密度理想或已知, 或者使用了多扫描杂波估计器时, 参数化目标跟踪的 ITS 公式。

如果杂波观测密度为先验未知 (非参数跟踪情况), ITS 如 9.3 节所述估计波门内的杂波密度。

单次扫描的 ITS 递归式在算法 25 和算法 26 中详细给出, 隐式地假设只有一条航迹, 当然, 如果有多条航迹被起始, IPDA 递归将对每条存在的航迹重复执行。

(1) k 时刻输入:

① 传感器产生的观测集 \mathbf{Y}^k 。

② 目标存在概率 $p(\chi_{k-1} | \mathbf{Y}^{k-1})$ 。

③ 对于每个航迹分量 c_{k-1} :

相对概率 $p(c_{k-1})$;

均值 $\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}(c_{k-1})$ 与协方差 $\mathbf{P}_{k-1|k-1}(c_{k-1})$ 。

(2) 航迹状态预测(2.2.1 节、5.5.1 节):

$$p(\chi_k | \mathbf{Y}^{k-1}) = \gamma_{11} p(\chi_{k-1} | \mathbf{Y}^{k-1})$$

(3) **for** 每个航迹分量 c_{k-1} **do**

$$[\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}(c_{k-1}), \mathbf{P}_{k|k-1}(c_{k-1})] = \text{KF}_P[\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}(c_{k-1}), \mathbf{P}_{k-1|k-1}(c_{k-1}), \mathbf{F}, \mathbf{Q}]$$

(4) **end for**

(5) 观测选择(5.5.2 节, 式(5.78))。

(6) **for** 每个航迹分量 c_{k-1} **do**

$$[\mathbf{y}_k(c_{k-1}), V_k(c_{k-1})] = \text{MS}_1[\mathbf{Y}_k, \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}(c_{k-1}), \mathbf{P}_{k|k-1}(c_{k-1}), \mathbf{H}, \mathbf{R}]$$

(7) **end for**

$$\mathbf{y}_k = \bigcup_{c_{k-1}} \mathbf{y}_k(c_{k-1})$$

(8) **for** 每个预选观测 $\mathbf{y}_k(i)$ **do**

(9) **for** 每个航迹分量 c_{k-1} **do**

(10) 预选观测的似然函数(式(5.27)):

$$[\{p_k(i, c_{k-1})\}_i] = \text{ML}_1[\{\mathbf{y}_k(i)\}_i, \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}(c_{k-1}), \mathbf{P}_{k|k-1}(c_{k-1}), \mathbf{H}, \mathbf{R}]$$

(11) **end for**

(12) 观测似然函数:

$$P_k(i) = \sum_{c_{k-1}} p(c_{k-1}) P_k(i, c_{k-1})$$

(13) **end for**

(14) **if** 非参数跟踪 **then**

(15) 计算 V_k (9.3 节式(9.6))。

(16) 杂波观测密度估计(9.3 节):

$$\rho = \hat{m}_k / V_k = (m_k - P_D P_G p(\chi_k | \mathbf{Y}^{k-1})) / V_k$$

(17) **end if**

(18) 单目标数据关联(5.5.3 节):

$$[p(\chi_k | \mathbf{Y}^k), \{\beta_k(i)\}_{i=0}^{m_k}] = \text{ISTDA}[p(\chi_k | \mathbf{Y}^{k-1}), \{p_k(i)\}_{i=1}^{m_k}]$$

算法 26 k 时刻 ITS 滤波递归公式:第 2 部分

(19) 建立暂时航迹分量 $\tilde{c}_k = \{i, c_{k-1}\}, i = 0, \dots, m_k$ 。

(20) **for** 每个 \tilde{c}_k **do** (式(5.90)和式(5.92)):

$$p(\tilde{c}_k) = \beta_k(i)p(c_{k-1}) \cdot \begin{cases} 1 & i = 0 \\ \frac{p_k(i, c_{k-1})}{p_k(i)} & i > 0 \end{cases}$$

$$[\hat{\mathbf{x}}_{k|k}(\tilde{c}_k), \mathbf{P}_{k|k}(\tilde{c}_k)] = \begin{cases} [\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}(c_{k-1}), \mathbf{P}_{k|k-1}(c_{k-1})] & i = 0 \\ \text{KF}_E[\mathbf{y}_k(i), \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}(c_{k-1}), \mathbf{P}_{k|k-1}(c_{k-1}), \mathbf{H}, \mathbf{R}] & i > 0 \end{cases}$$

(21) **end for**

(22) 分量控制(5.6 节)

$$\{\tilde{c}_k, \{p(\tilde{c}_k), \hat{\mathbf{x}}_{k|k}(\tilde{c}_k), \mathbf{P}_{k|k}(\tilde{c}_k)\}_{\tilde{c}_k}\} \rightarrow \{c_k, \{p(c_k), \hat{\mathbf{x}}_{k|k}(c_k), \mathbf{P}_{k|k}(c_k)\}_{c_k}\}$$

(23) 跟踪估计输出:

$$[\hat{\mathbf{x}}_{k|k}, \mathbf{P}_{k|k}] = \text{GMix}[\{\hat{\mathbf{x}}_{k|k}(c_k), \mathbf{P}_{k|k}(c_k), p(c_k)\}_{c_k}]$$

5.7.6 交互式多模型 - 集成航迹分裂 (IMM - ITS)

IMM - ITS 在 Mušicki 等(2004b^[119], 2007^[131])的文章中发表,它引入多目标模型对 ITS 算法进行机动目标拓展,它能比 ITS 算法更好地逼近真实的概率密度函数。因此,在机动目标情况,IMM - ITS 较 ITS 能进一步改进航迹维持、虚假航迹剔除以及目标状态估计的性能。

交互式多模型 - 集成概率数据关联 (IMM - ITS) 是一个杂波环境下单机动目标状态以及目标存在性概率的多扫描递归估计器。IMM - ITS 对各条航迹进行独立的预测和更新,也就是说当处理某一条航迹时,其他的航迹被置之不理,并且:

(1) 假设目标随机存在并递归估计目标存在性的概率;

(2) 假设目标可能发生机动,也就是说,目标运动可能在多个模型之间切换(模型个数为 $M \geq 1$);

(3) IMM - ITS 是一个多扫描跟踪算法,保留个数为正的航迹分量。

如果目标模型个数等于 1, IMM - ITS 则从概念与算法上退回到 ITS。

5.6 节中的航迹分量控制是 IMM - ITS 算法的一个集成的部分(虽然严格从理论上说并非必要),然而,不同于 IMM - IPDA 算法,系统设计者享有对航迹分量控制以及保留航迹分量的个数的绝对自由(当然,受限于计算资源)。与 ITS 一样,航迹分量控制提供了一个在计算资源和跟踪性能之间的折中机制。如果航迹分量控制到达极限,所有暂时航迹分量被合并为一个分量,IMM - ITS 恢复到 IMM - IPDA。

5.5.3 节中介绍了当杂波观测密度理想或已知,或者使用了多扫描杂波估计

器时,参数化目标跟踪的 IMM - ITS 公式。

如果杂波观测密度为先验未知(非参数跟踪情况),IMM - ITS 如 9.3 节所述估计波门内的杂波密度。

单次扫描的 IMM - ITS 递归式在算法 27 和算法 28 中详细给出,隐式地假设只有一条航迹,当然,如果有多条航迹被起始,IMM - ITS 递归将对每条存在的航迹重复执行。

算法 27 k 时刻 IMM - ITS 滤波递归公式:第 1 部分

(1) k 时刻输入:

① 传感器产生的观测集 Y^k 。

② 目标存在性概率 $p(\chi_{k-1} | Y^{k-1})$ 。

③ 对于每个航迹分量 c_{k-1} 。相对概率 $p(c_{k-1})$,对每个目标模型 σ :

$k-1$ 时刻后验模型概率 $\mu_{k-1|k-1}(c_{k-1}, \sigma)$;

均值 $\hat{x}_{k-1|k-1}(c_{k-1}, \sigma)$ 与协方差 $P_{k-1|k-1}(c_{k-1}, \sigma)$ 。

(2) 航迹状态预测(3.4.1 节、5.5.1 节):

$$p(\chi_k | Y^{k-1}) = \gamma_{11} p(\chi_{k-1} | Y^{k-1})$$

(3) **for** 每个航迹分量 c_{k-1} **do** (IMM 混合与预测):

$[\{\mu_{k|k-1}(c_{k-1}, \sigma), \hat{x}_{k|k-1}(c_{k-1}, \sigma), P_{k|k-1}(c_{k-1}, \sigma)\}_{\sigma}]$

$$= \text{IMM}_{\text{MP}}[\{\mu_{k-1|k-1}(c_{k-1}, \sigma), \hat{x}_{k-1|k-1}(c_{k-1}, \sigma), P_{k-1|k-1}(c_{k-1}, \sigma), F_{\sigma}, Q_{\sigma}\}_{\sigma}, \Gamma]$$

(4) **end for**

(5) 观测选择(5.5.2 节式(5.78))。

(6) **for** (每个航迹分量 c_{k-1}) 与 (每个目标模型 σ) **do**

$$[y_k(c_{k-1}, \sigma), V_k(c_{k-1}, \sigma)] = \text{MS}_1[Y_k, \hat{x}_{k|k-1}(c_{k-1}, \sigma), P_{k|k-1}(c_{k-1}, \sigma), H, R]$$

(7) **end for**

$$y_k = \bigcup_{c_{k-1}} \bigcup_{\sigma} y_k(c_{k-1}, \sigma)$$

(8) **for** 每个预选观测 $y_k(i)$ **do** (观测似然函数)

(9) **for** 每个航迹分量 c_{k-1} **do**

(10) **for** 每个目标模型 σ **do** (式(5.27))

$$[\{p_k(i, c_{k-1}, \sigma)\}_i] = \text{ML}_1[\{y_k(i)\}_i, \hat{x}_{k|k-1}(c_{k-1}, \sigma), P_{k|k-1}(c_{k-1}, \sigma), H, R]$$

(11) **end for**

$$p_k(i, c_{k-1}) = \sum_{\sigma} \mu_{k|k-1}(c_{k-1}, \sigma) p_k(i, c_{k-1}, \sigma)$$

(12) **end for**

$$p_k(i) = \sum_{c_{k-1}} p(c_{k-1}) p_k(i, c_{k-1})$$

- (13) **end for**
 (14) **if** 非参数跟踪 **then**
 (15) 计算 V_k (9.3 节式(9.6))。
 (16) 杂波观测密度估计(9.3 节)

$$\rho = \hat{m}_k / V_k = (m_k - P_D P_G P(\chi_k | Y^{k-1})) / V_k$$

- (17) **end if**
 (18) 单目标数据关联(5.5.3 节):

$$[p(\chi_k | Y^k), \{\beta_k(i)\}_{i=0}^{m_k}] = \text{ISTDA}[p(\chi_k | Y^{k-1}), \{p_k(i)\}_{i=1}^{m_k}]$$

算法 28 k 时刻 IMM - ITS 滤波递归公式:第 2 部分

- (19) 建立暂时航迹分量 $\tilde{c}_k = \{i, c_{k-1}\}, i = 0, \dots, m_k$ 。
 (20) **for** 每个 \tilde{c}_k **do** (应用式(5.90)、式(5.91)和式(5.92)):

$$p(\tilde{c}_k) = \beta_k(i) p(c_{k-1}) \cdot \begin{cases} 1 & i = 0 \\ \frac{p_k(i, c_{k-1})}{p_k(i)} & i > 0 \end{cases}$$

- (21) **for** 每个目标模型 σ **do**

$$\begin{aligned} \mu_{k|k}(\tilde{c}_k, \sigma) &= \mu_{k|k-1}(c_{k-1}, \sigma) \cdot \begin{cases} 1 & i = 0 \\ \frac{p_k(i, c_{k-1}, \sigma)}{p_k(i, c_{k-1})} & i > 0 \end{cases} \\ &\quad [\hat{x}_{k|k}(\tilde{c}_k, \sigma), P_{k|k}(\tilde{c}_k, \sigma)] \\ &= \begin{cases} [\hat{x}_{k|k-1}(c_{k-1}, \sigma), P_{k|k-1}(c_{k-1}, \sigma)] & i = 0 \\ \text{KF}_E[y_k(i), \hat{x}_{k|k-1}(c_{k-1}, \sigma), P_{k|k-1}(c_{k-1}, \sigma), H, R] & i > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

- (22) **end for**
 (23) **end for**
 (24) 分量控制(5.6 节):

$$\begin{aligned} &\{\tilde{c}_k, \{p(\tilde{c}_k), \{\mu_{k|k}(\tilde{c}_k, \sigma), \hat{x}_{k|k}(\tilde{c}_k, \sigma), P_{k|k}(\tilde{c}_k, \sigma)\}_{\sigma}\}_{\tilde{c}_k}\} \\ &\rightarrow \{c_k, \{p(c_k), \{\mu_{k|k}(c_k, \sigma), \hat{x}_{k|k}(c_k, \sigma), P_{k|k}(c_k, \sigma)\}_{\sigma}\}_{c_k}\} \end{aligned}$$

- (25) 跟踪估计输出:

$$[\hat{x}_{k|k}, P_{k|k}] = \text{GMix}[\{\hat{x}_{k|k}(c_k, \sigma), P_{k|k}(c_k, \sigma), p(c_k) \mu_{k|k}(c_k, \sigma)\}_{c_k, \sigma}]$$

5.8 基于目标存在性的多目标跟踪

本节介绍基于目标存在的多目标跟踪算法,从最简单的联合概率数据关联(JPDA)算法到最复杂的交互式多模型-联合集成航迹分裂(IMM-JITS)算法。

不同算法定义的航迹状态由对 5.3 节定义的通用跟踪模型做出不同特殊化而

得。特殊化界定可能是只存在一个目标模型(无机动模型)、将所有航迹分量合并成一个分量(单扫描跟踪),或者假设目标存在(目标确定性存在)。

本节介绍的所有算法都有一个共同的最优多目标跟踪数据关联过程,然而,由于必须将航迹分量数量限制在与计算资源匹配的程度,如 5.6 节所述,这些算法实际上不是最优的。

所有这些算法都是递归的,从之前 $k-1$ 时刻的航迹状态概率密度函数开始,传感器提供的 k 时刻的观测被用来计算更新的航迹状态概率密度函数。对每个算法这里只给出一个周期的更新过程。新航迹起始对于所有算法来说基本类似,将在 9.4 节单独介绍。

在某些场合,这些算法将有一些不同于它们原始发表的版本,如 JPDA 就是其中之一,不同之处会有适时的提醒。

由于每个算法有可能是对另一个算法作一些特殊界定的产物,因此不同的算法之间会出现相当一部分的重复。我们的意图是简要地介绍各个算法,并给出算法相对于最优目标跟踪算法的特殊化界定。读者只需阅读和理解本算法,而没有必要先去理解其他算法。

5.8.1 联合概率数据关联(JPDA)

联合概率数据关联(JPDA)是一种杂波环境非机动目标单扫描估计器。JPDA 是本章介绍的最简单也是计算效率最高的多目标跟踪算法。但是,它不能提供关于目标是否存在的概率以在虚假航迹剔除中作为航迹质量的评价指标。

(1) JPDA 假设每条航迹都对应一个实际存在的唯一的,也就是说,对于每条航迹来说目标存在性概率等于 1,且保持不变,即

$$p(\chi_{k-1} | Y^{k-1}) = p(\chi_k | Y^{k-1}) = p(\chi_k | Y^k) = 1$$

(2) JPDA 假设目标不会机动,也就是说,目标只遵循一个目标模型(模型个数为 $M=1$):

$$\mu_{k-1|k-1}(1) = \mu_{k|k-1}(1) = \mu_{k|k}(1) = 1$$

但是,不同的目标有可能遵循不同的目标模型。

(3) JPDA 是一个单扫描跟踪算法,也就是说,对于每条航迹,其对应的所有暂时航迹分量均被合并为一个分量(先验航迹分量和后验航迹分量的个数均等于 1, $C_{k-1} = C_k = 1$),并且先验概率密度函数和后验概率密度函数均由单个高斯概率密度函数逼近:

$$p(c_{k-1}) = p(c_k) = 1$$

由于只有一个目标模型,因此给定目标模型 σ 的条件将被约去,对于航迹状态分量也是一样:

$$\begin{aligned} p(\cdot | \sigma, \cdot) &= p(\cdot | \cdot) \\ p(\cdot | c_{k-1}, \cdot) &= p(\cdot | \cdot) \end{aligned}$$

例如

$$p(\mathbf{x}_k | \chi_k, \mathbf{Y}^{k-1}) = p(\mathbf{x}_k | c_{k-1}, \chi_k, \mathbf{Y}^{k-1}) = p(\mathbf{x}_k | c_{k-1}, \sigma, \chi_k, \mathbf{Y}^{k-1})$$

$$p_k(i) = p_k(i, c_k - 1) = p_k(i, c_{k-1}, \sigma)$$

5.6 节中的航迹分量控制是 PDA 算法的一个集成的部分,所有暂时航迹分量被合并为一个分量,而航迹更新操作变成 PDA 估计,4.3 节给出了详细介绍。

原始的 JPDA 算法(Bar - Shalom 和 Fortmann, 1988^[7]),假设不仅在每个聚类区域内,而且在整个监视区域内,具有恒定的杂波观测密度。本节介绍参数化 JPDA 算法,对每个观测使用非均匀杂波观测密度的先验值。

如果航迹之间距离足够远,JPDA 则恢复到 PDA。算法 29 中列出了单次扫描 JPDA 的详细递归过程。

算法 29 k 时刻 JPDA 滤波递归公式

(1) k 时刻输入:

- ① 传感器产生的观测集 \mathbf{Y}_k ;
- ② 每条航迹 τ 的状态估计均值 $\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}^\tau$ 与协方差 $\mathbf{P}_{k-1|k-1}^\tau$ 。

(2) **for** 每条航迹 τ **do**

(3) 航迹状态预测(见 2.2.1 节和 5.5.1 节):

$$[\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^\tau, \mathbf{P}_{k|k-1}^\tau] = \text{KF}_P[\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}^\tau, \mathbf{P}_{k-1|k-1}^\tau, \mathbf{F}, \mathbf{Q}]$$

(4) 观测选择(见 5.5.2 节式(5.78)):

$$[\mathbf{y}_k^\tau, V_k^\tau] = \text{MS}_1[\mathbf{Y}_k, \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^\tau, \mathbf{P}_{k|k-1}^\tau, \mathbf{H}, \mathbf{R}]$$

(5) 所有预选观测 i 的似然函数(见式(5.27)):

$$[\{p_k^\tau(i)\}_i] = \text{ML}_1[\{\mathbf{y}_k(i)\}_i, \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^\tau, \mathbf{P}_{k|k-1}^\tau, \mathbf{H}, \mathbf{R}]$$

(6) **end for**

(7) **for** 每个聚类 **do**(5.5.4 节)

$$\mathbf{y}_k = \bigcup_{\tau} \mathbf{y}_k^\tau$$

(8) **if** 非参数跟踪 **then**

(9) 通过式(9.7)(9.3 节)计算聚类的 V_k 。

(10) 杂波观测密度估计(9.3 节式(9.11)和式(9.7)):

$$\rho = \text{MTT}_{\text{MK}}(\{1\}_\tau, \{p_k^\tau(i)\}_{\tau,i})/V_k$$

(11) **end if**

(12) 多目标数据关联(无目标存在性)(5.5.4 节式(5.87)):

$$[\{-, \{\beta_k^\tau(i)\}_{i \geq 0}\}_\tau] = \text{JMTDA}[\{1, \{p_k^\tau(i)\}_{i > 0}\}_\tau]$$

(13) **end for**

(14) **for** 每条航迹 τ **do**

(15) 估计/合并(4.3 节):

$$[\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^T, \mathbf{P}_{k|k}^T] = \text{PDA}_E[\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^T, \mathbf{P}_{k|k-1}^T, \{\mathbf{y}_k(i)\}_{i=1}^{m_k}, \{\beta_k^T(i)\}_{i=0}^{m_k}, \mathbf{H}, \mathbf{R}]$$

(16) 估计输出:航迹均值 $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^T$ 和协方差 $\mathbf{P}_{k|k}^T$ 。

(17) end for

5.8.2 交互式多模型 - 联合概率数据关联 (IMM - JPDA)

IMM - JPDA 是 JPDA 算法(5.8.1 节)的机动目标拓展。IMM - JPDA 是一种杂波环境下的多机动目标单扫描估计器。同 JPDA 一样, IMM - JPDA 也不能提供关于目标是否存在的概率, 以在虚假航迹剔除中作为航迹质量的评价指标。

(1) IMM - JPDA 假设每条航迹都对应一个实际存在的唯一的目標, 也就是说, 对于每条航迹来说目标存在性概率等于 1, 且保持不变, 即

$$p(\chi_{k-1} | \mathbf{Y}^{k-1}) = p(\chi_k | \mathbf{Y}^{k-1}) = p(\chi_k | \mathbf{Y}^k) = 1$$

(2) IMM - JPDA 假设目标可能发生机动, 也就是说, 目标运动可能在多个目标模型之间切换, (模型个数为 $M \geq 1$)。每个目标则可能对应其自己的模型集以及模型转移概率。

(3) IMM - JPDA 是一个单扫描跟踪算法, 也就是说, 所有暂时航迹分量均被合并为一个分量(先验航迹分量和后验航迹分量的个数均等于 1, $C_{k-1} = C_k = 1$), 即

$$p(c_{k-1}) = p(c_k) = 1$$

由于只有一个目标模型, 因此给定目标模型 σ 的条件将被约去, 对于航迹状态分量也是一样:

$$p(\cdot | c_{k-1}, \cdot) = p(\cdot | \cdot)$$

例如

$$p(\mathbf{x}_k | \chi_k, \mathbf{Y}^{k-1}) = p(\mathbf{x}_k | c_{k-1}, \chi_k, \mathbf{Y}^{k-1})$$

$$p_k(i, c_{k-1}, \sigma) = p_k(i, \sigma)$$

$$\mu_{klk}(\tilde{c}_k, \sigma) = \mu_{klk}(i, \sigma)$$

如果目标模型的个数等于 1, IMM - JPDA 则从概念及算法上退回到 JPDA; 如果航迹之间距离足够远, IMM - JPDA 则退回到 IMM - PDA。

5.6 节中的航迹分量控制是 IMM - JPDA 算法的一个集成的部分, 所有暂时航迹分量被合并为一个分量, 而航迹更新操作变成 PDA 估计, 对每个目标模型 σ 各执行一次。

IMM - JPDA 算法可用于非齐次杂波中的参数化跟踪。如果杂波观测密度为先验未知, IMM - JPDA 用 9.3 节定义的方法对每个聚类内杂波观测密度进行估计, 这与原始发表的算法(Blom 和 Bloem, 2002^[30])有一些区别。

算法 30 中列出了单次扫描 IMM - JPDA 的详细递归过程。如前所述, 算法的轨迹状态更新部分(详见算法 22), 在 IMM - PDA 和 IMM - JPDA、IMM - IPDA 和

IMM - JIPDA 中均一样。换句话说,轨迹状态估计更新与目标存在性概率无关。

算法 30 k 时刻 IMM - JPDA 滤波递归公式

(1) k 时刻输入:

① 传感器产生的观测集 Y_k 。

② 每条航迹 τ 的每个目标模型 σ :

$k-1$ 时刻的后验模型概率 $\mu_{k-1|k-1}^\tau(\sigma)$;

状态估计均值 $\hat{x}_{k-1|k-1}^\tau(\sigma)$ 与协方差 $P_{k-1|k-1}^\tau(\sigma)$ 。

(2) **for** 每条航迹 τ **do**

(3) IMM 混合与预测(见 3.4.1 节和 5.5.1 节):

$$\begin{aligned} & [\{\mu_{k|k-1}^\tau(\sigma), \hat{x}_{k|k-1}^\tau(\sigma), P_{k|k-1}^\tau(\sigma)\}_\sigma] \\ &= \text{IMM}_{\text{MP}}[\{\mu_{k-1|k-1}^\tau(\sigma), \hat{x}_{k-1|k-1}^\tau(\sigma), P_{k-1|k-1}^\tau(\sigma), F_\sigma, Q_\sigma\}_\sigma, \Gamma] \end{aligned}$$

(4) 为每个模型选择观测{见 5.5.2 节式(5.78)}:

$$[y_k^\tau(\sigma), V_k^\tau(\sigma)] = \text{MS}_1[Y_k, \hat{x}_{k|k-1}^\tau(\sigma), P_{k|k-1}^\tau(\sigma), H, R]$$

(5) **for** 每个预选观测 i **do**(似然函数,式(5.27)):

$$[\{p_k^\tau(i, \sigma)\}_i] = \text{ML}_1[\{y_k(i)\}_i, \hat{x}_{k|k-1}^\tau(\sigma), P_{k|k-1}^\tau(\sigma), H, R]$$

对每个角 σ

$$p_k^\tau(i) = \sum_\sigma \mu_{k|k-1}^\tau(\sigma) p_k^\tau(i, \sigma)$$

(6) **end for**

(7) **end for**

(8) **for** 每个聚类 **do**(5.5.4 节)

$$y_k = \bigcup_\tau \bigcup_\sigma y_k^\tau(\sigma)$$

(9) **if** 非参数跟踪 **then**

(10) 通过式(9.7)(9.3 节)计算聚类的 V_k 。

(11) 杂波观测密度估计(9.3 节,式(9.11)和式(9.7)):

$$\rho = \text{MTT}_{\text{MK}}(\{1\}_\tau, \{p_k^\tau(i)\}_{\tau,i})/V_k$$

(12) **end if**

(13) 多目标数据关联(无目标存在性)(5.5.4 节式(5.87)):

$$[\{-, \{\beta_k^\tau(i)\}_{i \geq 0}\}_\tau] = \text{JMTDA}[\{1, \{p_k^\tau(i)\}_{i > 0}\}_\tau]$$

(14) **end for**

(15) 对每条航迹 τ 执行算法 22(IMM - PDA,第 2 部分:状态估计输出)。

5.8.3 联合集成概率数据关联(JIPDA)

JIPDA 在 Mušicki 和 Evans(2002^[117])以及 Mušicki 等(2004b^[119])的文章中发

表。JIPDA 通过增加目标存在性概率的递归预测与更新对 JPDA 进行了拓展;从另一个角度看,JIPDA 是 IPDA 在多目标情况的扩展。

JIPDA 是一种杂波环境下非机动多目标状态和目标存在性概率的单扫描估计器。由于目标存在性概率为虚假航迹剔除过程提供了工具,JIPDA 是一个可作为完整目标跟踪方案基础的最简单的杂波环境下的多目标跟踪算法。由于结构简单,IPDA 是本章算法中计算效率最高的基于随机目标存在性的多目标状态估计器。9.2 节给出了一个线性多目标跟踪的应用例子,也是一个简单、计算高效的多目标跟踪算法。

(1) JIPDA 对每条航迹,假设目标随机存在并递归估计目标存在性的概率;

(2) JIPDA 假设每个目标(如果存在)不会机动,也就是说,目标只遵循一个目标模型(模型个数为 $M=1$):

$$\mu_{k-1|k-1}(1) = \mu_{k|k-1}(1) = \mu_{k|k}(1) = 1$$

不同的潜在目标有可能遵循不同的目标模型。

(3) JIPDA 是一个单扫描跟踪算法,也就是说,所有的暂时航迹分量均被合并为一个分量(先验航迹分量和后验航迹分量的个数均等于 1,即

$$C_{k-1} = C_k = 1$$

$$p(c_{k-1}) = p(c_k) = 1$$

由于只有一个目标模型,因此给定目标模型 σ 的条件将被约去,对于航迹状态分量也是一样:

$$(\cdot | \sigma, \cdot) = p(\cdot | \cdot)$$

$$p(\cdot | c_{k-1}, \cdot) = p(\cdot | \cdot)$$

例如

$$p(\mathbf{x}_k | \chi_k, \mathbf{Y}^{k-1}) = p(\mathbf{x}_k | c_{k-1}, \chi_k, \mathbf{Y}^{k-1}) = p(\mathbf{x}_k | c_{k-1}, \sigma, \chi_k, \mathbf{Y}^{k-1})$$

$$p_k(i) = p_k(i, c_{k-1}) = p_k(i, c_{k-1}, \sigma)$$

5.6 节中的航迹分量控制是 JIPDA 算法的一个集成的部分,所有暂时航迹分量被合并为一个分量,而航迹更新操作变成 PDA 估计,4.3 节给出了详细介绍。

5.5.4 节中介绍了当杂波观测密度理想或已知,或者使用了多扫描杂波估计器时,参数化目标跟踪的 JIPDA 公式。

如果杂波观测密度为先验未知(非参数跟踪情况),JIPDA 如 9.3 节所述估计聚类区域内的杂波密度。

在航迹相距足够远的情形,JIPDA 退回到 IPDA。算法 31 列出了单次扫描的 JIPDA 的详细递归过程。

算法 31 k 时刻 JIPDA 滤波递归公式

(1) k 时刻输入:

① 传感器产生的观测集 \mathbf{Y}_k ;

② 每条航迹 τ 的目标存在性概率 $p(\chi_{k-1}^\tau | Y^{k-1})$;

③ 每条航迹 τ 的状态估计均值 $\hat{x}_{k-1|k-1}^\tau$ 与协方差 $P_{k-1|k-1}^\tau$ 。

(2) **for** 每条航迹 τ **do**

(3) 航迹状态预测(见 2.2.1 节和 5.5.1 节):

$$p(\chi_k^\tau | Y^{k-1}) = \gamma_{11} p(\chi_{k-1}^\tau | Y^{k-1})$$

$$[\hat{x}_{k|k-1}^\tau, P_{k|k-1}^\tau] = \text{KF}_P[\hat{x}_{k-1|k-1}^\tau, P_{k-1|k-1}^\tau, F, Q]$$

(4) 观测选择(见 5.5.2 节式(5.78)):

$$[y_k^\tau, V_k^\tau] = \text{MS}_1[Y_k, \hat{x}_{k|k-1}^\tau, P_{k|k-1}^\tau, H, R]$$

(5) 所有预选观测 i 的似然函数(见式(5.27)):

$$[p_k^\tau(i)]_i = \text{ML}_1[y_k(i)]_i, \hat{x}_{k|k-1}^\tau, P_{k|k-1}^\tau, H, R]$$

(6) **end for**

(7) **for** 每个聚类 **do**(5.5.4 节)

$$y_k = \bigcup_{\tau} y_k^\tau$$

(8) **if** 非参数跟踪 **then**

(9) 通过式(9.7)(9.3 节)计算聚类的 V_k 。

(10) 杂波观测密度估计(9.3 节,式(9.11)和式(9.7)):

$$\rho = \text{MTT}_{\text{MK}}(\{p(\chi_k^\tau | Y^{k-1})\}_\tau, \{p_k^\tau(i)\}_{\tau,i})/V_k$$

(11) **end if**

(12) 多目标数据关联(无目标存在性)(5.5.4 节式(5.87)):

$$[\{p(\chi_k^\tau | Y^k), \{\beta_k^\tau(i)\}_{i \geq 0}\}_\tau] = \text{JMTDA}[\{p(\chi_k^\tau | Y^{k-1}), \{p_k^\tau(i)\}_{i > 0}\}_\tau]$$

(13) **end for**

(14) **for** 每条航迹 τ **do**

(15) 估计/合并(4.3 节):

$$[\hat{x}_{k|k}^\tau, P_{k|k}^\tau] = \text{PDA}_E[\hat{x}_{k|k-1}^\tau, P_{k|k-1}^\tau, \{y_k(i)\}_{i=1}^{m_k}, \{\beta_k^\tau(i)\}_{i=0}^{m_k}, H, R]$$

(16) 估计输出:航迹均值 $\hat{x}_{k|k}^\tau$ 和协方差 $P_{k|k}^\tau$ 。

(17) **end for**

5.8.4 交互式多模型-联合集成概率数据关联(IMM-JIPDA)

IMM-JIPDA 在 Mušicki 和 Suvorova(2008^[125])的文章中发表。IMM-JIPDA 不仅是 JIPDA 算法(5.8.3 节)的机动目标拓展,还是 IMM-IPDA(5.7.4 节)的多目标跟踪拓展。

IMM-JIPDA 是一种杂波环境下多机动目标状态及存在性概率的单扫描估计器。

(1) IMM-JIPDA 对每条航迹,假设目标随机存在并递归估计目标存在性的概率。

(2) IMM - JIPDA 假设每个目标(如果存在)都可能出现机动,也就是说,目标运动可能在多个目标模型之间切换(模型个数 $M \geq 1$)。每个目标可能有自己的模型组合与模型转移概率。

(3) IMM - JIPDA 是一个单扫描跟踪算法,也就是说,每条航迹的所有暂时航迹分量均被合并为一个分量(先验航迹分量和后验航迹分量的个数均等于 1,即

$$C_{k-1} = C_k = 1$$

$$p(c_{k-1}) = p(c_k) = 1$$

换句话说,由于只有一个目标模型,因此给定目标模型 σ 的条件将被约去,对于航迹状态分量也是一样:

$$p(\cdot | c_{k-1}, \cdot) = p(\cdot | \cdot)$$

例如

$$p(\mathbf{x}_k | \chi_k, \mathbf{Y}^{k-1}) = p(\mathbf{x}_k | c_{k-1}, \chi_k, \mathbf{Y}^{k-1})$$

$$p_k(i, c_{k-1}, \sigma) = p_k(i, \sigma)$$

$$\mu_{klk}(\tilde{c}_k, \sigma) = \mu_{klk}(i, \sigma)$$

如果目标模型的个数等于 1, IMM - JIPDA 则从概念及算法上退回到 JIPDA; 如果航迹之间距离足够远, IMM - JIPDA 则退回到 IMM - IPDA。

5.6 节中的航迹分量控制是 IMM - JIPDA 算法的一个集成的部分,所有暂时航迹分量被合并为一个分量,而航迹更新操作变成 PDA 估计,对每个目标模型 σ 各执行一次。

5.5.4 节中介绍了当杂波观测密度理想或已知,或者使用了多扫描杂波估计器时,参数化目标跟踪的 IMM - JIPDA 公式。

如果杂波观测密度为先验未知(非参数跟踪情况), IMM - JIPDA 如 9.3 节所述估计聚类区域内的杂波密度。

算法 32 列出了单次扫描的 IMM - JIPDA 的详细递归过程。再次提请注意,算法 22 中的轨迹状态估计更新过程,对于 IMM - PDA、IMM - IPDA、IMM - JPDA 和 IMM - JIPDA 都一样。

算法 32 k 时刻 IMM - JIPDA 滤波递归公式

(1) k 时刻输入:

- ① 传感器产生的观测集 \mathbf{Y}_k 。
- ② 每条航迹 τ 的目标存在概率 $p(\chi_{k-1}^\tau | \mathbf{Y}^{k-1})$ 。
- ③ 每条航迹 τ 的每个目标模型 σ :
 $k-1$ 时刻的后验模型概率 $\mu_{k-1|k-1}^\tau(\sigma)$;
 状态估计均值 $\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}^\tau(\sigma)$ 与协方差 $\mathbf{P}_{k-1|k-1}^\tau(\sigma)$ 。

(2) **for** 每条航迹 τ **do**

(3) 目标存在性预测(5.5.1节):

$$p(\chi_k^\tau | Y^{k-1}) = \gamma_{11} p(\chi_{k-1}^\tau | Y^{k-1})$$

(4) IMM 混合与预测(3.4.1节):

$$\begin{aligned} & [\{\mu_{k|k-1}^\tau(\sigma), \hat{x}_{k|k-1}^\tau(\sigma), P_{k|k-1}^\tau(\sigma)\}_\sigma] \\ &= \text{IMM}_{\text{MP}}[\{\mu_{k-1|k-1}^\tau(\sigma), \hat{x}_{k-1|k-1}^\tau(\sigma), P_{k-1|k-1}^\tau(\sigma), F_\sigma, Q_\sigma\}_\sigma, \Gamma] \end{aligned}$$

(5) 为每个模型 σ 选择观测(见 5.5.2 节式(5.78)):

$$[y_k^\tau(\sigma), V_k^\tau(\sigma)] = \text{MS}_1[Y_k, \hat{x}_{k|k-1}^\tau(\sigma), P_{k|k-1}^\tau(\sigma), H, R]$$

(6) for 每个预选观测 i do(似然函数,式(5.27)):

$$[\{p_k^\tau(i, \sigma)\}_i] = \text{ML}_1[\{y_k(i)\}_i, \hat{x}_{k|k-1}^\tau(\sigma), P_{k|k-1}^\tau(\sigma), H, R]$$

对于每个模型 σ , 有

$$p_k^\tau(i) = \sum_{\sigma} \mu_{k|k-1}^\tau(\sigma) p_k^\tau(i, \sigma)$$

(7) end for

(8) end for

(9) for 每个聚类 do(5.5.4 节)

$$y_k = \bigcup_{\tau} \bigcup_{\sigma} y_k^\tau(\sigma)$$

(10) if 非参数跟踪 then

(11) 通过式(9.7)(9.3 节)计算 V_k 。

(12) 杂波观测密度估计(9.3 节式(9.11)):

$$\rho = \text{MTT}_{\text{MK}}(\{p(\chi_k^\tau | Y^{k-1})\}_\tau, \{p_k^\tau(i)\}_{\tau, i}) / V_k$$

(13) end if

(14) 多目标数据关联(无目标存在性)(5.5.4 节式(5.87)):

$$[\{p(\chi_k^\tau | Y^k), \{\beta_k^\tau(i)\}_{i \geq 0}\}_\tau] = \text{JMTDA}[\{p(\chi_k^\tau | Y^{k-1}), \{p_k^\tau(i)\}_{i > 0}\}_\tau]$$

(15) end for

(16) 对每条航迹 τ 应用算法 22 {IMM-PDA, 第 2 部分: 状态估计输出}。

5.8.5 联合集成航迹分裂(JITS)

JITS 在 Mušicki 等(2003^[128])及 Mušicki 和 Evans(2008^[120])的文章中发表。JITS 相对于 ITS 增加了多目标跟踪的能力。与 ITS 相似, JITS 能够提供比 JIPDA 更好的目标状态概率密度函数的逼近。因此, 较之 JIPDA, JITS 具有更好的航迹维持、虚假航迹剔除以及状态估计性能, 特别是在低检测概率和/或高杂波密度的困难情况下。另一方面, 也会带来一些非正面的影响, JITS 较 JIPDA 需要更多的计算资源。这是可调的, 航迹分量控制提供了一个在计算资源和跟踪性能之间的折中机制。

联合集成航迹分裂(JITS)是一个杂波环境非机动目标状态及目标存在性概率

的多目标多扫描估计器。

(1) JITS 假设目标随机存在并递归估计目标存在性的概率。

(2) JITS 假设每个目标(如果存在)均不会发生机动,也就是说,目标只遵循一个目标模型(模型个数为 $M=1$):

$$\mu_{k-1|k-1}(1) = \mu_{k|k-1}(1) = \mu_{k|k}(1) = 1$$

(3) JITS 是一个多扫描跟踪算法,保留个数为正的航迹分量。

由于只有一个目标模型,因此给定目标模型 σ 的条件将被约去,对于航迹状态分量也是一样:

$$p(\cdot | \sigma, \cdot) = p(\cdot | \cdot)$$

例如

$$p(\mathbf{x}_k | c_{k-1}, \chi_k, \mathbf{Y}^{k-1}) = p(\mathbf{x}_k | c_{k-1}, \sigma, \chi_k, \mathbf{Y}^{k-1})$$

$$p_k(i, c_{k-1}) = p_k(i, c_{k-1}, \sigma)$$

5.6 节中的航迹分量控制是 JITS 算法的一个集成的部分(虽然严格从理论上说并非必要)。然而,不同于 JIPDA 算法,系统设计者享有对航迹分量控制以及保留航迹分量的个数的绝对自由(当然,受限于计算资源)。如果航迹分量控制到达极限,所有暂时航迹分量被合并为一个分量, JITS 恢复到 JIPDA;如果航迹相距足够远, JITS 则退回至 ITS。

5.5.4 节中介绍了当杂波观测密度理想或已知,或者使用了多扫描杂波估计器时,参数化目标跟踪的 JITS 公式。

如果杂波观测密度为先验未知(非参数跟踪情况), JITS 如 9.3 节所述估计聚类区域内的杂波密度。

单次扫描的 JITS 递归式在算法 33 中详细给出。算法 33 显示,算法 26 中的轨迹状态估计更新,对于 JITS 和 ITS 是一样的。这再一次证实了本章算法之间的无缝连接关系。

算法 33 k 时刻 JITS 滤波递归公式

(1) k 时刻输入:

① 传感器产生的观测集 \mathbf{Y}_k 。

② 每条航迹 τ 的目标存在性概率 $p(\chi_{k-1}^\tau | \mathbf{Y}^{k-1})$ 。

③ 对于每个航迹分量 c_{k-1} :

相对概率 $p(c_{k-1}^\tau)$;

均值 $\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}^\tau(c_{k-1})$ 与协方差 $\mathbf{P}_{k-1|k-1}^\tau(c_{k-1})$ 。

(2) **for** 每条航迹 τ **do**

(3) $p(\chi_k^\tau | \mathbf{Y}^{k-1}) = \gamma_{11} p(\chi_{k-1}^\tau | \mathbf{Y}^{k-1})$ (航迹状态预测, 2.2.1 节, 5.5.1 节)。

(4) 每个航迹分量 c_{k-1} 的轨迹状态预测:

$$[\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^\tau(c_{k-1}), \mathbf{P}_{k|k-1}^\tau(c_{k-1})] = \text{KF}_P[\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}^\tau(c_{k-1}), \mathbf{P}_{k-1|k-1}^\tau(c_{k-1}), \mathbf{F}, \mathbf{Q}]$$

(5) 为每个航迹分量 c_{k-1} 选择观测(5.5.2 节式(5.78)):

(6) $[y_k^T(c_{k-1}), V_k^T(c_{k-1})] = MS_1[Y_k, \hat{x}_{k|k-1}^T(c_{k-1}), P_{k|k-1}^T(c_{k-1}), H, R]$
for 每个预选观测 i **do**(观测似然函数, 式(5.27))
 $[p_k^T(i, c_{k-1})] = ML_1[\{y_k(i)\}_i, \hat{x}_{k|k-1}^T(c_{k-1}), P_{k|k-1}^T(c_{k-1}), H, R]$
 对于每个航迹分量 c_{k-1} , 有

$$p_k^T(i) = \sum_{c_{k-1}} p(c_{k-1}^T) p_k^T(i, c_{k-1})$$

(7) **end for** (每个预选观测 i)

(8) **end for** (每条航迹 τ)

(9) **for** 每个聚类 **do**(5.5.4 节)

$$y_k = \bigcup_{\tau} \bigcup_{c_{k-1}} y_k^T(c_{k-1})$$

(10) **if** 非参数跟踪 **then**

(11) 通过式(9.7)(9.3 节)计算 V_k 。

(12) 杂波观测密度估计(9.3 节式(9.11)):

$$\rho = MTT_{MK}(\{p(\chi_k^T | Y^{k-1})\}_{\tau}, \{p_k^T(i)\}_{\tau, i}) / V_k$$

(13) **end if**

(14) 多目标数据关联(无目标存在性)(5.5.4 节式(5.87)):

$$[\{p(\chi_k^T | Y^k), \{\beta_k^T(i)\}_{i \geq 0}\}_{\tau}] = JMTDA[\{p(\chi_k^T | Y^{k-1}), \{p_k^T(i)\}_{i \geq 0}\}_{\tau}]$$

(15) **end for** (每个聚类)

(16) 对每条航迹 τ 执行算法 26(ITS 滤波, 第 2 部分: 状态估计输出)。

5.8.6 交互式多模型 - 联合集成航迹分裂 (IMM - JITS)

IMM - JITS 在 Mušicki 和 Evans, 2008^[120] 发表。IMM - JITS 通过引入多模型对 JITS 进行拓展, 它能比 JITS 算法更好地逼近真实的概率密度函数。因此, 在机动目标情况, IMM - JITS 较 JITS 能进一步改进航迹维持、虚假航迹剔除以及目标状态估计的性能。

IMM - JITS 是一个杂波环境下多机动目标状态以及目标存在性概率的多扫描递归估计器。

(1) IMM - JITS 对每条航迹假设目标随机存在并递归估计目标存在性的概率。

(2) IMM - JITS 假设目标可能发生机动, 也就是说, 目标运动可能在多个模型之间切换(模型个数为 $M \geq 1$); 每条航迹可能有它自己的模型组合以及模型转移概率矩阵。如果目标模型的个数等于 1, IMM - JITS 则从概念和算法上均退回到 JITS。

(3) IMM - JITS 是一个多扫描跟踪算法, 保留个数为正的航迹分量。

5.6 节中的航迹分量控制是 IMM - JITS 算法的一个集成部分(虽然严格从理

论上说并非必要),然而,不同于 IMM - JIPDA 算法,系统设计者享有对航迹分量控制以及保留航迹分量的个数的绝对自由(当然,受限于计算资源)。如果航迹分量控制到达极限,所有暂时航迹分量被合并为一个分量,IMM - JITS 恢复到 IMM - JIPDA。如果目标相距足够远,IMM - JITS 则退回至 IMM - ITS。

5.5.4 节中介绍了当杂波观测密度理想或已知,或者使用了多扫描杂波估计时,参数化目标跟踪的 IMM - JITS 公式。

如果杂波观测密度为先验未知(非参数跟踪情况),IMM - JITS 如 9.3 节所述估计聚类区域内的杂波密度。

单次扫描的 IMM - JITS 递归式在算法 34 中详细给出。算法 34 显示,算法 28 中的轨迹状态估计更新过程,对于 IMM - JITS 和 IMM - ITS 是一样的。这又一次证实了本章算法之间的无缝连接关系。

算法 34 k 时刻 IMM - JITS 滤波递归公式

(1) k 时刻输入:

- ① 传感器产生的观测集 Y_k 。
- ② 每条航迹 τ 的目标存在性概率 $p(\chi_{k-1}^\tau | Y^{k-1})$ 。
- ③ 对于每条航迹的每个航迹分量 c_{k-1} :
 相对概率 $p(c_{k-1}^\tau)$;
 $k-1$ 时刻后验模型概率 $\mu_{k-1|k-1}^\tau(c_{k-1}, \sigma)$;
 估计均值 $\hat{x}_{k-1|k-1}^\tau(c_{k-1}, \sigma)$ 与协方差 $P_{k-1|k-1}^\tau(c_{k-1}, \sigma)$ 。

(2) 对每条航迹 τ 进行状态预测(3.4.1 节,5.5.1 节):

$$p(\chi_k^\tau | Y^{k-1}) = \gamma_{11} p(\chi_{k-1}^\tau | Y^{k-1})$$

对每个航迹分量 c_{k-1} :

$$\begin{aligned} & [\{\mu_{k|k-1}^\tau(c_{k-1}, \sigma), \hat{x}_{k|k-1}^\tau(c_{k-1}, \sigma), P_{k|k-1}^\tau(c_{k-1}, \sigma)\}_\sigma] \\ &= \text{IMM}_{\text{MP}}[\{\mu_{k-1|k-1}^\tau(c_{k-1}, \sigma), \hat{x}_{k-1|k-1}^\tau(c_{k-1}, \sigma), P_{k-1|k-1}^\tau(c_{k-1}, \sigma), F_\sigma, Q_\sigma\}_\sigma, \Gamma] \\ & \text{(观测选择, 5.5.2 节, 式(5.78))} \end{aligned}$$

(3) **for** 每条航迹 τ , 分量 c_{k-1} 和目标模型 σ **do**

$$\begin{aligned} & [y_k^\tau(c_{k-1}, \sigma), V_k^\tau(c_{k-1}, \sigma)] \\ &= \text{MS}_1[Y_k, \hat{x}_{k|k-1}^\tau(c_{k-1}, \sigma), P_{k|k-1}^\tau(c_{k-1}, \sigma), H, R] \end{aligned}$$

(4) **end for**

(观测似然函数, 5.5.2 节, 式(5.27))

(5) **for** 每个预选观测 $i > 0$, 航迹 τ , 分量 c_{k-1} 和目标模型 σ **do**

$$\begin{aligned} & [\{p_k^\tau(i, c_{k-1}, \sigma)\}_i] = \text{ML}_1[\{y_k(i)\}_i, \hat{x}_{k|k-1}^\tau(c_{k-1}, \sigma), P_{k|k-1}^\tau(c_{k-1}, \sigma), H, R] \\ & p_k^\tau(i, c_{k-1}) = \sum_{\sigma} \mu_{k|k-1}^\tau(c_{k-1}, \sigma) p_k^\tau(i, c_{k-1}, \sigma) \end{aligned}$$

$$p_k^\tau(i) = \sum_{c_{k-1}} p(c_{k-1}^\tau) p_k^\tau(i, c_{k-1})$$

(6) **end for**

(7) **for** 每个聚类 **do**(5.5.4 节)

$$y_k = \bigcup_{\tau} \bigcup_{c_{k-1}} \bigcup_{\sigma} y_k^\tau(c_{k-1}, \sigma)$$

(8) **if** 非参数跟踪 **then**

(9) 通过式(9.7)(9.3 节)计算 V_k 。

(10) 杂波观测密度估计(9.3 节式(9.11)):

$$\rho = \text{MTT}_{\text{MK}}(\{p(\chi_k^\tau | \mathbf{Y}^{k-1})\}_\tau, \{p_k^\tau(i)\}_{\tau,i})/V_k$$

(11) **end if**

(12) 多目标数据关联(无目标存在性)(5.5.4 节式(5.87)):

$$[\{p(\chi_k^\tau | \mathbf{Y}^k), \{\beta_k^\tau(i)\}_{i \geq 0}\}_\tau] = \text{JMTDA}[\{p(\chi_k^\tau | \mathbf{Y}^{k-1}), \{p_k^\tau(i)\}_{i \geq 0}\}_\tau]$$

(13) **end for** {每个聚类}

(14) 对每条航迹 τ 执行算法 28 {IMM - ITS 滤波, 第 2 部分: 状态估计输出}。

5.9 小 结

本章介绍了各种基于存在性的目标跟踪算法。这类算法在实际的目标跟踪应用中具有重要的意义。现实环境中,检测结果集合中存在虚假检测,因此跟踪器需要一个办法来区分真实和虚假的航迹,同时还要适应漏警情况。递归地计算目标存在性概率为解决这一问题提供了一个基础。本章将 IMM - ITS 和 IMM - JITS 算法作为问题的最通用的贝叶斯解进行介绍,它们需要最少的约束。然后通过增加场景特殊约束,推导了其他算法:ITS, IMM - IPDA, IPDA, IMM - PDA, PDA, JITS, IMM - JIPDA, JIPDA, IMM - JPDA 以及 IPDA。

第6章 基于随机集的杂波环境 目标跟踪方法

通常多目标跟踪问题通过扩展单目标跟踪方法解决,每个目标被独立跟踪。当目标间距离较近时,将无法判定哪个观测是来自哪个目标。利用数据关联方法可以实现多个观测到多个目标的分配。扩展单目标跟踪实现多目标跟踪方法的前提是假定监视区域内的目标数量已知,然而这种假设往往不成立。

这一问题促进了“数据关联”逻辑的发展。数据关联以概率的形式计算观测的来源,它假设观测来源的可能性,并计算每个假设的概率。例如,单目标跟踪中,对观测来源不确定性作两种假设:观测源于感兴趣的那个目标和观测源于杂波。这种假设忽略了观测可能来源于其他目标的可能性。这一问题通过假设“观测来源于第 i 个(N 个目标之内)目标”得到了缓解。但是将目标数量假定为某个确定值是其本质的不足。此外,这种方法没有提供一种度量方法来衡量目标数量估计的有效性。多目标跟踪需要同时估计目标的状态和目标数量。

当一个航迹的有效波门内的观测多于一个时,其他观测可以看做是新的假设航迹,这就是多假设跟踪(MHT)方法。但是这种方法不支持航迹管理,会导致无界问题。通过专门的规则“若一个目标在 N 次连续扫描后仍没有有效观测,那么它为无效目标”可以减少目标数量,这些规则是任意设定的,且这些条件往往是凭直观设定的而不是通过系统的方法设置。集成概率数据互联(IPDA)以及它的改进算法,联合IPDA(JIPDA)利用了一种有限的、近似的方法,它基于航迹质量(目标存在概率)测度进行航迹维持,从而估计动态变化但数目有限的航迹。另一种跟踪有限航迹的方法是利用了反证法的IMM-PDA^①。它假定目标存在,但以可观测性概率限定目标数量。这些方法相比MHT而言在航迹管理上是更系统的方法,但仍不是估计目标数量的最优方法。

随机有限集理论(RFS)

总之,上述多目标跟踪方法都是对单目标跟踪方法的扩展。虽然这些方法给出了目标数量的理想估计,但是它们没有给出明确的估计目标数目的数学模型。一个更缜密的方法是基于RFS的方法(Mahler, 2004a^[103], 2004b^[104])。它的基本原理是利用集合的概念建立多目标跟踪的模型,集合中包含数目随机变化的单目

① IMM-PDA 常用来处理杂波环境下的机动目标跟踪问题,然而在 Bar-Shalom 等人的文章中,在建立目标航迹时采用的是一个模型,称为可观测模型,检测概率为 $0 < P_D \leq 1$,而其他模型称为不可观测模型, $P_D = 0$ 。

标状态,每个目标的状态又是随机向量。每个目标动力学特性的变化遵循某些运动模型,而目标数目的变化则遵循某点过程模型。多目标跟踪问题就是要计算这个集值量的后验概率密度,称为这个集值变量的全局后验概率密度。这种集合描述可以构建目标数目不确定性情况下的跟踪框架。而且集合元素与顺序无关,即集合 $\{x_1, x_2\}$ 等于集合 $\{x_2, x_1\}$ 。这种表达形式抓住了多目标跟踪的基本问题,即估计目标数目和每个目标的状态。基于随机集的计算方法解决了利用观测信息(也用集合表示)同时估计目标数目和目标状态的问题。

基于随机集的滤波方法处理估计问题的方式与标准单目标跟踪方法一样。它利用贝叶斯理论在时间上迭代计算密度,不同的是,这个密度是定义在随机集合上,而不是一般的向量或矩阵上。需要合适的测度分布函数能够描述随机变化有限集的统计特性,“信任质量”定义了这样一种测度函数,其微分可得到马尔可夫多目标集的概率密度和似然函数。这些计算过程(积分和微分)都是利用随机有限集理论(附录 B, Mahler, 2004a^[103]) 在随机集上进行的。

本章主要介绍随机有限集滤波的最优贝叶斯方程以及相关运动方程和传感器观测方程。当随机变化(任意个数目标可能出现或消失)的集合的全局概率密度通过多目标集合最优贝叶斯递推时会产生组合问题,这个问题在相关文献中已经得到确认(Mahler, 2003^[101]; Zajic 和 Mahler, 2003^[166]; Vo 等, 2005^[158]; Sidenbladh, 2003^[148]; Vo 和 Ma, 2006^[157])。一种更实用的方法是仅仅传递后验概率密度的一阶矩,这种方法就是概率假设密度滤波(PHD), PHD 在空间上积分可以得到目标的数目。因为 PHD 与目标数目有关, PHD 的递推涉及点过程模型和相关计算。

本章介绍 PHD 和各种实用的实现方法。基于随机集理论的单目标跟踪滤波方法将作为一个随机集滤波的例子进行介绍。IPDA 将作为一个实例,通过 RFS 滤波方程进行了推导。另外还从 PHD 滤波方程出发推导了联合 IPDA 滤波(Challa 和 Chakravorty, 2009^[38])。基于 IPDA 的滤波方法和 RFS 滤波大约在相同的时期完成了独立的发展,以上这些推导表明了这两种方法的理论联系,同时也证明了 IPDA 和 JIPDA 可以实现接近最优的多目标跟踪。

6.1 最优贝叶斯多目标跟踪滤波

在本节后续部分将要介绍基于随机集理论的目标动态模型和传感器观测模型,并在最优贝叶斯框架下推导和应用马尔可夫转移密度函数以及似然函数。本章应用有限集统计特性,这些统计特性理论由 Ron Mahler(2004a^[103]) 引入,并在附录 B 中进行简要的回顾。

6.1.1 基于 RFS 的目标动态模型和传感器观测模型

利用随机集表示法,目标动态模型为

$$\Gamma_{k+1} = \Phi_k(X_k, V_k) \cup B_k(X_k) \quad (6.1)$$

式中: $\Phi_k(\cdot)$ 表示从 k 到 $k+1$ 时刻目标状态的传递; $B_k(\cdot)$ 表示多目标情况下目标的产生。类似地, 传感器观测模型可以表示为

$$\Sigma = T(X) \cup C(X) \quad (6.2)$$

式中: $T(\cdot)$ 表示源于真实目标的观测; $C(\cdot)$ 表示杂波观测。

6.1.2 基于 RFS 的马尔可夫转移概率密度和似然函数

随机集 Γ_k 的统计特性可以由它的信任质量函数描述:

$$\beta_{\Gamma_{k|k-1}}(S | X_{k-1}) = \text{Prob}(\Gamma_k \subseteq S) = p(\Gamma_k \subseteq S)$$

若在 $k-1$ 时刻多目标状态为 X_{k-1} , 这就是 k 时刻在区域 S 内发现所有目标的全概率公式。

类似地, 变化的随机有限集 Σ_k 的统计特性也可以由它的信任质量函数表示:

$$\beta_{\Sigma_k}(S | X_k) = \beta_{\Sigma'_k \cup \Lambda_k}(S | X_k) = p(\Sigma'_k \cup \Lambda_k \subseteq S)$$

在观测区域 S 中给定目标状态 X_k , 这就是一个扫描周期内的所有观测的全概率公式。

对这些信任质量函数微分(利用广义 Radon - Nikodym 定理), 可以得到多目标马尔可夫转移概率密度和多目标观测似然函数(Goodman 等, 1997^[60])。因信任质量函数是随机集合的函数, 上面提到的微分为集值微分。利用 FISST 可以得到信任质量函数的微分, 从而得到多目标马尔可夫转移密度函数和多目标似然函数如下:

(1) 多目标马尔可夫转移密度函数为信任质量函数 $\beta_{\Gamma_{k|k-1}}(S | X_{k-1})$ 的集值微分, 可以表示为

$$f_{k|k-1}(x_k | X_{k-1}) = \frac{\delta \beta_{\Gamma_{k|k-1}}(S | X_{k-1})}{\delta x_k}$$

(2) 多目标量对应观测模型的似然函数是信任质量函数 $\beta_{\Sigma_k}(S | X_k)$ 的集值微分, 即

$$f_{\Sigma_k}(y_k | x_k) = \frac{\delta \beta_{\Sigma_k}(S | X_k)}{\delta y_k}$$

6.1.3 RFS 最优估计

多目标马尔可夫转移概率密度和似然函数可以应用于标准非线性滤波方程中得到多目标后验概率密度的迭代计算方法。贝叶斯迭代的一般形式与单传感器单目标跟踪问题的迭代形式一样, 可以表示为

$$f_{k|k}(x_k | y^k) = \frac{1}{\Delta} f_{\Sigma_k}(y_k | x_k) \int f_{k|k-1}(x_k | X_{k-1}) f_{k-1|k-1}(X_{k-1} | y^{k-1}) \delta X_{k-1} \quad (6.3)$$

但是上述积分方程是随机集合上的积分。考虑目标存在不确定性时的单目标跟踪问题, 假定: 如果在跟踪场景中没有目标存在, 那么这种情况持续下去; 如果在

跟踪场景中有一个目标,那么目标 B 也将存在(概率为 p_v)或者消失(概率为 $1 - p_v$)。特别地,这种情况下,我们的目的是判定目标是否存在,若存在估计其状态。假设至多只有一个目标的问题由 Mušicki(1994^[115])提出,与 Mahler(1997^[99])提出 FISST 时间几乎相同。Mušicki 等人在线性高斯假设条件下提出了一种这一问题的近似方法,称之为 IPDA。第 5 章和第 9 章对这一方法分别进行了介绍。随机集框架可以适用于这一简单目标跟踪问题,也可以推导出一些有用的滤波方法。

6.2 概率假设密度(PHD)滤波近似

6.2.1 RFS 的一阶矩:PHD

在单目标跟踪问题当中,两个最常用的后验概率密度统计量为一阶矩和二阶矩,忽略了高阶矩,通常认为一阶矩和二阶矩对后验概率密度来说已经足够。这种情况下,这两个统计量的迭代计算保证了后验概率密度的迭代计算。如果进一步假设二阶矩也可以忽略,那么后验概率密度可以仅仅由一阶矩描述,对一个滤波算法来讲,一阶矩的迭代计算已经足够(常增益卡尔曼滤波就是基于此假设)。如果概率密度函数是单峰函数且分布区间集中在均值附近,那么这种假设是合理的。

这一思想也应用于用随机集框架下的滤波算法推导中。因为传递高阶矩(二阶矩)时,需要解决可能性组合问题。为了便于说明,假定只有两个目标的情况。多目标状态集 X_k 可能有四种情况: $\{\emptyset\}, \{x_1\}, \{x_2\}, \{x_1, x_2\}$ 。当目标更多时,组合数目会变得非常大且很难管理,因而如果可以仅用一阶矩来描述概率密度且传递一阶矩是非常有意义的。这个一阶矩称为“概率假设密度(PHD)”。它定义如下:PHD 是一个在给定空间积分为这个空间内目标数目的密度函数。

从这个角度讲,它不同于在空间积分值为 1 的概率密度函数。后续部分推导 PHD 的迭代计算。

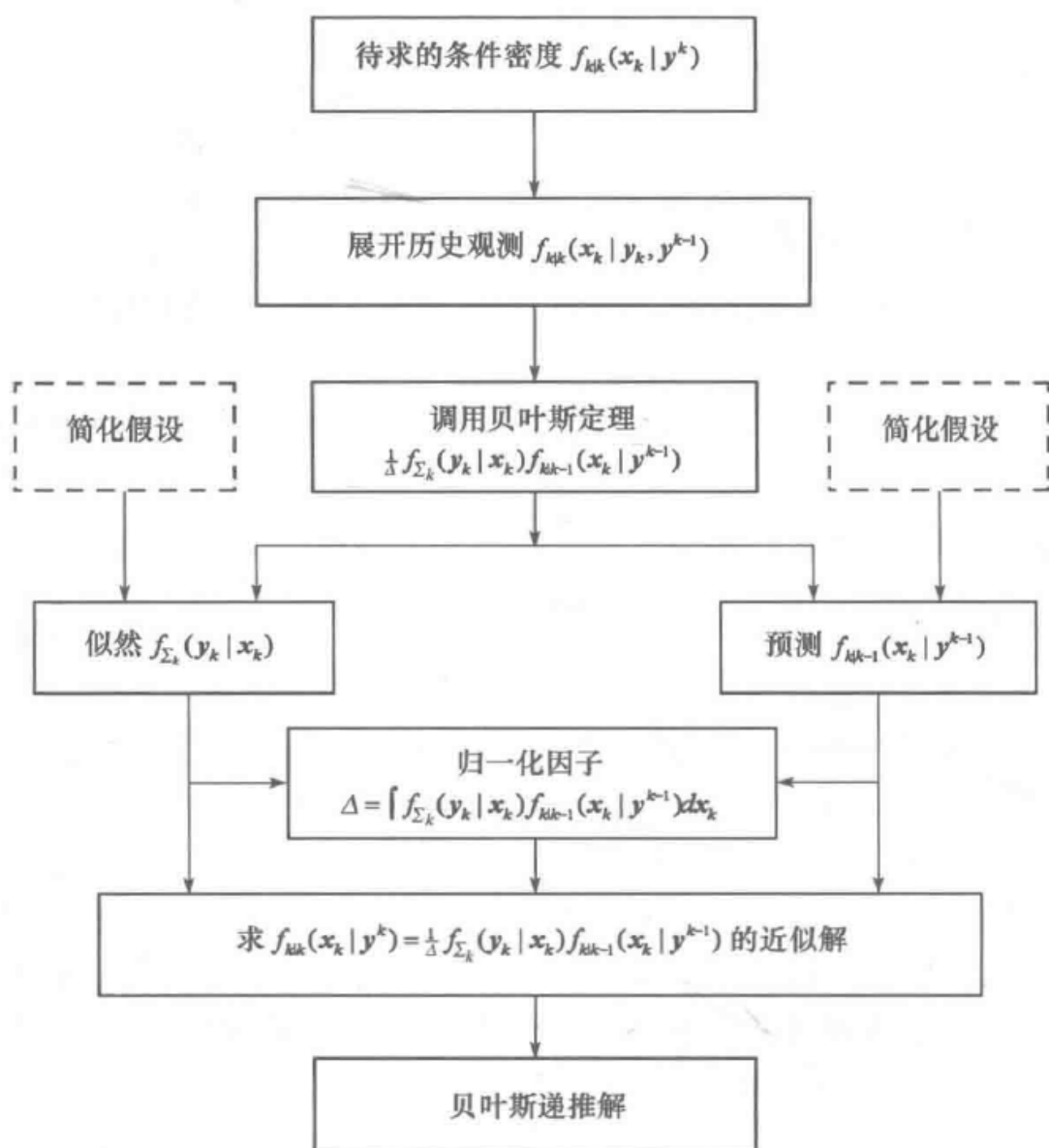
6.2.2 PHD 预测

令 $f_{k|k}(X|Z^k)$ 为 k 时刻多目标状态后验密度,它的预测为

$$f_{k+1|k}(X|Z^k) = \int f_{k+1|k}(X|W)f_{k|k}(W|Z^k)\delta W$$

式中: $f_{k+1|k}(X|W)$ 为多目标马尔可夫转移密度函数,预测密度的概率产生函数(PGFI)为

$$\begin{aligned} G_{k+1|k}[h] &= \int h^X f_{k+1|k}(X|Z^k)\delta X \\ &= \int \left(\int h^X f_{k+1|k}(X|W)\delta X \right) f_{k|k}(W|Z^k)\delta W \\ &= \int G_{k+1|k}[h|X]f_{k|k}(X|Z^k)\delta X \end{aligned} \tag{6.4}$$



多目标跟踪的贝叶斯递推框架

式中: $G_{k+1|k}[h|X]$ 为 $f_{k+1|k}(X|W)$ 的 PGFI。在 $h=1$ 时, PGFI 的势微分为预测概率密度的 PHD:

$$D_{k+1|k}(x) = \frac{\delta G_{k+1|k}}{\delta x}[1]$$

这里多目标运动模型包含存活目标的动态转移、新目标的分裂(以存活目标)以及新目标的产生,表示为

$$\Xi_{k+1|k} = T(X) \cup \Psi(X) \cup \Psi_0(X)$$

式中: $T(X)$ 为存活目标随机集, $T(X) = T(x_1) \cup T(x_2) \cup \dots \cup T(x_r)$; $\Psi(X)$ 为它生目标集合, $\Psi(X) = \Psi(x_1) \cup \Psi(x_2) \cup \dots \cup \Psi(x_r)$; $\Psi_0(X)$ 为新生目标。

那么 PGFI $G_{k+1|k}[h|X]$ 为

$$\begin{aligned}
 G_{k+1|k}[h|X] &= (1 - p_s + p_s p_h)^X \times b_h^X \times e_h \\
 G_{k+1|k}[h] &= \int (1 - p_s + p_s p_h)^X \times b_h^X \times e_h f_{k|k}(X|Z^k) \delta X \\
 &= e_h \int (1 - p_s + p_s p_h)^X \times b_h^X f_{k|k}(X|Z^k) \delta X
 \end{aligned}$$

$$= e_h G_{k|k} [(1 - p_s + p_s p_h) b_h] \quad (6.5)$$

式中: $b_h(\mathbf{x}) = \int h^x b_{k+1|k}(X|\mathbf{x}) \delta X$ 为 $b_{k+1|k}(X|\mathbf{x})$ 的 PGFl; $e_h = \int h^x b_{k+1|k}(X) \delta X$ 为 $b_{k+1|k}(X)$ 的 PGFl; $p_h(\mathbf{x}) = \int h(\gamma) f_{k+1|k}(\mathbf{y}|\mathbf{x}) \delta \mathbf{y}$ 。

代入 $\Phi[h] = (1 - p_s + p_s p_h) b_h$, 可得

$$\begin{aligned} \frac{\delta G_{k+1|k}}{\delta \mathbf{x}}[h] &= \frac{\delta G_{k+1|k}}{\delta \mathbf{x}}[h] (e_h G_{k|k}[\Phi[h]]) \\ &= \left(\frac{\delta}{\delta \mathbf{x}} e_h \right) G_{k|k}[\Phi[h]] + e_h \left(\frac{\delta}{\delta \mathbf{x}} G_{k|k}[\Phi[h]] \right) \end{aligned} \quad (6.6)$$

$G_{k+1|k}[h]$ 的 PHD, $D_{k+1|k}(\mathbf{x})$ 为在 $h=1$ 时的微分

$$\begin{aligned} D_{k+1|k}(\mathbf{x}) &= \frac{\delta G_{k+1|k}}{\delta \mathbf{x}}[1] \\ &= \left(\frac{\delta}{\delta \mathbf{x}} e_h \right) \Big|_{h=1} G_{k|k}[\Phi[h]] + e_h \left(\frac{\delta}{\delta \mathbf{x}} G_{k|k}[\Phi[h]] \right) \Big|_{h=1} \\ &= b_{k+1|k}(\mathbf{x}) \cdot 1 + 1 \cdot \left(\frac{\delta}{\delta \mathbf{x}} G_{k|k}[\Phi[h]] \right) \Big|_{h=1} \end{aligned}$$

式中: $b_{k+1|k}(\mathbf{x})$ 为 $b_{k+1|k}(X)$ 的 PHD。那么 $G_{k|k}[\Phi[h]]$ 的 PHD 为

$$D_{k+1|k}(\mathbf{x}) = \int \frac{\delta \Phi_w}{\delta \mathbf{x}}[1] D_{k|k}(\mathbf{w}) d\mathbf{w}$$

其中

$$\begin{aligned} \frac{\delta \Phi_w}{\delta \mathbf{x}}[h] &= \frac{\delta}{\delta \mathbf{x}} (1 - p_s(\mathbf{w}) + p_s(\mathbf{w}) p_h(\mathbf{w})) b_h(\mathbf{w}) \\ &= p_s(\mathbf{w}) \left(\frac{\delta}{\delta \mathbf{x}} p_h(\mathbf{w}) \right) b_h(\mathbf{w}) + ((1 - p_s(\mathbf{w}) + p_s(\mathbf{w}) p_h(\mathbf{w}))) \left(\frac{\delta}{\delta \mathbf{x}} b_h(\mathbf{w}) \right) \\ &= p_s(\mathbf{w}) f_{k+1|k}(\mathbf{x}/\mathbf{w}) b_h(\mathbf{w}) + ((1 - p_s(\mathbf{w}) + p_s(\mathbf{w}) p_h(\mathbf{w}))) b_{k+1|k}(\mathbf{x}/\mathbf{w}) \end{aligned}$$

因此, 令 $h=1$, 可得

$$\frac{\delta \Phi_w}{\delta \mathbf{x}}[1] = p_s(\mathbf{w}) f_{k+1|k}(\mathbf{x}|\mathbf{w}) + b_{k+1|k}(\mathbf{x}|\mathbf{w})$$

PHD 的预测方程为

$$D_{k+1|k}(\mathbf{x}) = b_{k+1|k}(\mathbf{x}) + \int p_s(\mathbf{w}) f_{k+1|k}(\mathbf{x}|\mathbf{w}) b_h(\mathbf{w}) + b_{k+1|k}(\mathbf{x}|\mathbf{w}) d\mathbf{w}$$

6.2.3 PHD 更新

令 $f_{k+1|k}(X|Z^k)$ 为多目标预测概率密度, $Z_{k+1} = \{z_1, \dots, z_m\}$ 是最新观测集合。由贝叶斯迭代公式可以得到后验概率密度为

$$f_{k+1|k+1}(X|Z^{k+1}) = K^{-1} f_{k+1}(Z|X, \mathbf{x}^*) f_{k+1|k}(X|Z^k)$$

其中归一化因子为

$$K = f_{k+1}(Z | Z^k) = \int f_{k+1}(Z | X, \mathbf{x}^*) f_{k+1|k}(X | Z^k) \delta X$$

为了求解 PHD 算法, 定义二变量的 PGFl 为

$$\begin{aligned} F[g, h] &= \iint h^X g^Z f_{k+1}(Z | X, \mathbf{x}^*) f_{k+1|k}(X | Z^k) \delta X \delta Z \\ &= \iint h^X G_{k+1}[g | X, \mathbf{x}^*] f_{k+1|k}(X | Z^k) \delta X \end{aligned} \quad (6.7)$$

多目标观测密度为

$$G_{k+1}[g | X, \mathbf{x}^*] = \int g^Z f_{k+1}(Z | X, \mathbf{x}^*) \delta Z$$

归一化因子 K 可以表示为

$$K = f_{k+1}(Z | Z^k) = \frac{\delta^m F}{\delta z_m \cdots \delta z_1} [0, 1]$$

$f_{k+1|k+1}(X | Z^{k+1})$ 的 PHD 可以表示为

$$D_{k+1|k+1}(\mathbf{x} | Z^{k+1}) = \frac{1}{f_{k+1}(Z_{k+1} | Z^k)} \frac{\delta^{m+1} F}{\delta z_m \cdots \delta z_1 \delta x} [0, 1]$$

现在, 观测模型可以表示为

$$\Sigma = \Sigma(\mathbf{x}_1) \cup \cdots \cup \Sigma(\mathbf{x}_n) \cup \Theta$$

式中: $\Sigma(\mathbf{x}_i)$ 为由第 i 个目标产生的观测 (如果目标丢失则为空集); Θ 为泊松分布且与状态独立的虚警。同时假定 $\Sigma(\cdot)$ 和 Θ 相互独立, 则可得

$$G_{k+1}[g | X, \mathbf{x}^*] = G_{k+1}[g | \mathbf{x}_1] \cdots G_{k+1}[g | \mathbf{x}_n] G_{\Theta}[g]$$

式中

$$G_{k+1}[g | \mathbf{x}_i] = 1 - p_d(\mathbf{x}_i) + p_d(\mathbf{x}_i) p_g(\mathbf{x}_i)$$

$$p_g(\mathbf{x}) = \int g(z) f(z | \mathbf{x}) dz$$

$$G_{\Theta}[g] = e^{\lambda \kappa[g] - \lambda}$$

$$\kappa[g] = \int g(z) c(z) dz$$

那么, 二变量的 PGFl 变为

$$\begin{aligned} F[g, h] &= \iint h^X (1 - p_d + p_d p_g)^X e^{\lambda \kappa[g] - \lambda} f_{k+1|k}(X | Z^k) \delta X \delta Z \\ &= e^{\lambda \kappa[g] - \lambda} \int ((1 - p_d + p_d p_g) h)^X f_{k+1|k}(X | Z^k) \delta X \\ &= e^{\lambda \kappa[g] - \lambda} G_{k+1|k}[(1 - p_d + p_d p_g) h] \end{aligned}$$

为了得到 PHD 更新的闭式解, 假定多目标预测概率密度 $f_{k+1|k}(X | Z^k)$ 近似为泊松分布:

$$G_{k+1|k}[h] = e^{\mu\sigma[h]-\mu}$$

$$\sigma[h] = \int h(\mathbf{x}) s(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

故 PHD 为

$$D_{k+1|k} = \mu s(\mathbf{x})$$

因此

$$G_{k+1|k}[(1-p_D+p_D p_g)h] = \exp(\mu\sigma[(1-p_D)h] + \mu\sigma[hp_D p_g] - m\mu)$$

$$F[g, h] = \exp(\lambda\kappa[g] - \lambda + \mu\sigma[(1-p_D)h] + \mu\sigma[hp_D p_g] - \mu)$$

令 $h=1$, 得

$$F[g, 1] = \exp(\lambda\kappa[g] - \lambda + \mu\sigma[p_D] + \mu\sigma[p_D p_g])$$

一般来讲, 数据更新后验概率密度的分母(对 $F(\cdot)$ 微分, 并令 $g=0$) 为

$$f_{k+1}(Z|Z^k) = e^{-\lambda-\mu\sigma[p_D]} \prod_{z \in Z} (\lambda c(z) + \mu\sigma[p_D L_z])$$

类似地, 数据更新后验概率密度的分子为

$$\begin{aligned} \frac{\delta^{m+1} F}{\delta z_m \cdots \delta z_1 \delta \mathbf{x}}[0, 1] &= e^{-\lambda-\mu\sigma[p_D]} \prod_{z \in Z} (\lambda c(z) + \mu\sigma[p_D L_z]) \mu(1-p_D)(\mathbf{x}) s(\mathbf{x}) + \\ &e^{-\lambda-\mu\sigma[p_D]} \prod_{z \in Z} (\lambda c(z) + \mu\sigma[p_D L_z]) \times \\ &\sum_{z \in Z} \frac{\mu p_D(\mathbf{x}) L_z(\mathbf{x}) s(\mathbf{x})}{\lambda c(z) + \mu\sigma[p_D L_z]} \end{aligned}$$

将分子和分母代入, 可得 PHD 更新方程为

$$\begin{aligned} D_{k+1|k+1}(\mathbf{x}) &= \mu(1-p_D)(\mathbf{x}) s(\mathbf{x}) + \sum_{z \in Z} \frac{\mu p_D(\mathbf{x}) L_z(\mathbf{x}) s(\mathbf{x})}{\lambda c(z) + \mu\sigma[p_D L_z]} \\ &= \mu(1-p_D)(\mathbf{x}) D_{k+1|k}(\mathbf{x}) + \sum_{z \in Z} \frac{D_{k+1|k}[p_D L_z] p_D(\mathbf{x}) L_z(\mathbf{x}) D_{k+1|k}(\mathbf{x})}{(\lambda c(z) + D_{k+1|k}[p_D L_z]) D_{k+1|k}[p_D L_z]} \times \\ &\quad \frac{p_D(\mathbf{x}) L_z(\mathbf{x}) D_{k+1|k}(\mathbf{x})}{D_{k+1|k}[p_D L_z]} \end{aligned}$$

6.2.4 CPHD 近似

将多目标后验概率密度假设为泊松分布且传递一阶矩, PHD 成功地避免了基于 RFS 理论的贝叶斯迭代计算量大的棘手问题。但是, 研究表明它估计目标数目 $N_{k|k}$ 的性能较差, 尤其是在出现目标消失和杂波密集的情况下 (Erdinc, 2005^[55])。这一不足源于两个主要原因:

(1) PHD 通过线性近似给出目标数目。例如, 在单目标情况下, PHD 给出 k 时刻的目标期望数

$$N_{k|k} = (1 - p_{D, x_{k-1}}) N_{k|k-1}$$

或者目标的真实估计数目

$$N_{k|k} = \frac{(1 - p_{D,x_{k-1}}) N_{k|k-1}}{1 - p_{D,x_{k-1}} N_{k|k-1}}$$

当 $N_{k|k-1} = 1$ 时, PHD 的目标数目近似为 $(1 - p_{D,x_{k-1}})$, 然而未作近似时的估计值为 1。因此, PHD 因为线性近似丢失了信息。

(2) PHD 利用后验概率密度期望来估计目标数目:

$$N_{k|k} = \sum_{n \geq 0} n p_{k|k}(n | \mathbf{y}^k)$$

但是, 由虚警引入分布函数中的次模式使期望值产生不确定性的偏移, 这导致目标数目估计的不稳定。

为了解决目标数目估计的不稳定性, 需要传递高阶矩。但是这是不实用的, 因为将会导致前面提到的组合问题。因此, Mahler(2007)^[105] 提出了另一种方法, 这种方法称为 CPHD, 因为它除了传递多目标状态的分布函数外, 还传递目标数目的分布函数(或称为多目标状态集的势)。依照这种方法, CPHD 除了保留仅传递多目标后验概率密度一阶矩外, 还避免了多目标数目估计的线性近似问题。此外, 根据势分布函数, 通过最大后验概率而不是通过后验期望估计目标数目, 避免了在杂波密集情况下期望不确定平移带来的不稳定性。但是, 为了得到闭合形式的递推计算, CPHD 的状态模型去掉了它生目标集。

6.2.5 PHD 小结

算法 35 和算法 36 详细介绍了 PHD 滤波算法的迭代过程。

算法 35 PHD 递推滤波方程

(1) k 时刻时间输入:

- ① \mathbf{Y}_k 为传感器观测输入;
- ② $k-1$ 时刻的目标强度函数为 $D_{k-1|k-1}(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{y}^{k-1})$ 。

算法 36 PHD 递推滤波方程

(2) 预测:

$$D_{k|k-1}(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}^{k-1}) = \gamma_k(\mathbf{x}_k) + \int [p_{S,k}(\mathbf{x}_{k-1}) f_{k|k-1}(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) + b_{k|k-1}(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1})] \times D_{k-1|k-1}(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{y}^{k-1}) d\mathbf{x}_{k-1}$$

式中: $\gamma_k(\mathbf{x}_k)$ 是新生目标在 k 时刻的强度函数; $p_{S,k}(\mathbf{x}_{k-1})$ 是目标存活概率; $f_{k|k-1}(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1})$ 是单目标马尔可夫转移密度; $b_{k|k-1}(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1})$ 是它生目标的强度函数。

(3) 更新:

$$D_{klk}(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}^k) = \left[(1 - p_{D,k}(\mathbf{x}_k)) + \sum_{z_k \in \gamma_k} \frac{p_{D,k}(\mathbf{x}_k) f_k(z_k | \mathbf{x}_k)}{\lambda_k c_k(z_k) + \psi(z_k | \mathbf{y}^{k-1})} \right] \times D_{klk-1}$$

式中: $\psi(z_k | \mathbf{y}^{k-1}) = \int p_{D,k} f_k(z_k | \mathbf{x}_k) D_{klk-1}(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}^{k-1})$; $p_{D,k}(\mathbf{x}_k)$ 是检测概率; $f_k(z_k | \mathbf{x}_k)$ 是单目标似然函数; λ_k 和 $c_k(z_k)$ 分别是虚警强度函数和虚警空间密度函数。

(4) 目标数目

$$N_{klk} = \int D_{klk}(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}^k) d\mathbf{x}_k$$

6.2.6 CPHD 迭代小结

在介绍 CPHD 迭代之前, 首先介绍几个表示符号。

(1) 组合系数:

$$\binom{l}{j}_c = \frac{l!}{j!(l-j)!}$$

(2) 排列系数:

$$\binom{l}{j}_p = \frac{l!}{(l-j)!}$$

(3) 内积:

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \begin{cases} \int \alpha(x) \beta(x) dx, & \alpha, \beta \text{ 为实值函数} \\ \sum_{l=0}^{\infty} \alpha(l) \beta(l), & \alpha, \beta \text{ 为实序列} \end{cases}$$

(4) $e_j(\cdot)$ 是有限集 γ 的 j 阶基本对称函数:

$$e_j(\gamma) = \sum_{S \subseteq \gamma, |S|=j} \prod_{\zeta \in S} \zeta$$

其中: $e_0(\gamma) = 1$ 。

算法 37 介绍了 CPHD 滤波算法。

算法 37 CPHD 递推滤波方程

(1) k 时刻输入

① $k-1$ 时刻势分布函数: 目标数目的分布函数, 即

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{k-1|k-1}(n)$$

② 在 $k-1$ 时刻的强度函数:

$$D_{k-1|k-1}(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{y}^{k-1})$$

(2) 预测:

$$p_{k|k-1}(n) = \sum_{j=0}^n p_{\gamma,k}(n-j) \prod_{l=k-1}^k [D_{k-1|k-1}(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{y}^{k-1}), p_{k-1}](j)$$

$$D_{k|k-1}(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}^{k-1}) = \int p_{S,k}(\mathbf{x}_{k-1}) f_{k|k-1}(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) d\mathbf{x}_{k-1} + \gamma_{k,\mathbf{x}_k}$$

式中: $\prod_{l=k-1}^k [D, p](j) = \sum_{l=j}^{\infty} \binom{l}{j}_C \frac{\langle p_{S,k}, D \rangle^j \langle 1 - p_{S,k}, D \rangle^{l-j}}{\langle 1, v \rangle} p(l)$; $f_{k|k-1}(\cdot | \mathbf{x}_{k-1})$ 是给定 \mathbf{x}_{k-1} 的情况下的单目标转移密度; γ 是自生目标的强度函数; $p_{\gamma,k}(n-j)$ 是自生目标的势分布函数。

(3) 更新:

$$p_{k|k} = \frac{W_k^0[D_{k|k-1}(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}^{k-1}); \mathbf{y}_k](n) p_{k|k-1}(n)}{\langle W_k^0[D_{k|k-1}(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}^{k-1}); \mathbf{y}_k](n), p_{k|k-1}(n) \rangle}$$

$$D_{k|k}(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}^k) = (1 - p_{D,k}(\mathbf{x}_k)) \frac{\langle W_k^1[D_{k|k-1}(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}^{k-1}); \mathbf{y}_k], p_{k|k-1} \rangle}{\langle W_k^0[D_{k|k-1}(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}^{k-1}); \mathbf{y}_k], p_{k|k-1} \rangle} D_{k|k-1}(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}^{k-1}) +$$

$$\sum_{z_k \in \mathbf{y}_k} \psi_{k,z_k} \frac{\langle W_k^1[D_{k|k-1}(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}^{k-1}); \mathbf{y}_k \setminus \{z_k\}], p_{k|k-1} \rangle}{\langle W_k^0[D_{k|k-1}(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}^{k-1}); \mathbf{y}_k], p_{k|k-1} \rangle} D_{k|k-1}(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}^{k-1})$$

其中

$$W_k^u[D, \mathbf{y}](n) = \sum_{j=0}^{\min(|\mathbf{y}|, n)} (|\mathbf{y}| - j)! p_{K,k}((|\mathbf{y}| - j)) \binom{n}{j+u}_p \times$$

$$\frac{\langle 1 - p_{D,k}(\mathbf{x}_k), D \rangle^{n-(j+u)}}{\langle 1, D \rangle^n} e_j(\Xi_k(D, \mathbf{y}_k))$$

$$\psi_k(\mathbf{x}, z) = \frac{\langle 1, \lambda_k c_k \rangle}{\lambda_k c_k(z_k)} f_k(z | \mathbf{x}) p_{D,k}(\mathbf{x})$$

$$\Xi_k(D, \mathbf{y}) = \{ \langle D, \psi_{k,z} \rangle : z \in \mathbf{y}_k \}$$

$f_k(\cdot | \mathbf{x}_k)$ 表示 k 时刻给定目标 \mathbf{x}_k 的观测似然函数; $p_{D,k}(\mathbf{x}_k)$ 表示给定目标 \mathbf{x}_k 的检测概率; $p_{K,k}(\cdot)$ 表示杂波势分布函数。

6.3 近似滤波

PHD 迭代计算(35)一般来说没有闭合形式解,即使 PHD 提供了另一种方法来传递 RFS 分布的一阶矩,它也很难实现。粒子 PHD(Sidenbladh, 2003^[148]; Zajic 和 Mahler, 2003^[166]; Vo 等, 2005^[158])和高斯混合 PHD(Vo 和 Ma, 2006^[157])算法在相应近似条件下给出了 PHD 迭代算法的闭式解。

6.3.1 高斯混合 PHD 滤波

另一种 PHD 滤波的近似实现方法为“高斯混合 PHD 滤波(GMPHD)”。要获

取 GMPHD 的闭合解形式,需要几个条件,总结如下:

(1) 目标状态为线性高斯动态模型:

$$f_{k|k-1}(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) = N(\mathbf{x}_k; \mathbf{F}_{k-1} \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{Q}_{k-1})$$

每个传感器的观测模型为线性高斯模型:

$$f_k(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k) = N(\mathbf{z}_k; \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k, \mathbf{R}_k)$$

式中: $N(a; b, c)$ 为随机变量 a 满足均值为 b 、协方差矩阵为 c 的高斯分布; \mathbf{F}_{k-1} 为状态转移矩阵; \mathbf{Q}_{k-1} 和 \mathbf{R}_{k-1} 为对应的过程噪声和观测噪声协方差矩阵。

(2) 目标存活和检测概率与目标状态独立:

$$p_{D,k}(\mathbf{x}_k) = p_{D,k}$$

$$p_{S,k}(\mathbf{x}_{k-1}) = p_{S,k}$$

(3) 新生和它生目标的强度函数为高斯和的形式:

$$\gamma_k(\mathbf{x}_k) = \sum_{i=1}^{J_{\gamma,k}} w_{\gamma,k}^i N(\mathbf{x}_k; \mathbf{m}_{\gamma,k}^i; \mathbf{P}_{\gamma,k}^i)$$

$$b_{k|k-1}(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) = \sum_{j=1}^{J_{b,k}} w_{b,k}^j N(\mathbf{x}_k; \mathbf{F}_{b,k-1}^j \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{u}_{b,k-1}^j; \mathbf{Q}_{b,k-1}^j)$$

其中: ① 对于 $i=1, 2, \dots, \gamma_k$, $w_{\gamma,k}^i$, $\mathbf{m}_{\gamma,k}^i$, $\mathbf{P}_{\gamma,k}^i$ 分别表示第 i 个它生目标分量的权值、均值、协方差, γ_k 表示所有分量的总数。

② 对于 $j=1, 2, \dots, J_{b,k}$, $w_{b,k}^j$, $\mathbf{F}_{b,k-1}^j \mathbf{x}_{k-1}$, $\mathbf{P}_{b,k-1}^j$ 表示第 j 个分量新生分量的权值、均值、协方差矩阵, $J_{b,k}$ 为所有分量的总数。

在 $k-1$ 时刻同样假设密度为高斯混合形式:

$$D_{k+1|k-1}(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{y}^{k-1}) = \sum_{i=1}^{J_{k-1}} w_{k-1}^i N(\mathbf{x}_{k-1}; \mathbf{m}_{k-1}^i, \mathbf{P}_{k-1}^i)$$

基于以上假设和条件, PHD 简化为算法 38 所介绍的 GMPHD 形式。

算法 38 高斯混合 PHD 迭代过程

(1) k 时刻输入迭代。

在 $k-1$ 时刻的密度:

$$D_{k-1|k-1}(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{y}^{k-1}) = \sum_{i=1}^{J_{k-1}} w_{k-1}^i N(\mathbf{x}_{k-1}; \mathbf{m}_{k-1}^i, \mathbf{P}_{k-1}^i)$$

(2) 预测:

$$D_{k|k-1}(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}^{k-1}) = D_{S,k|k-1}(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}^{k-1}) + D_{b,k|k-1}(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}^{k-1}) + \gamma_k(\mathbf{x}_k)$$

其中

$$\begin{aligned}
\gamma_k(\mathbf{x}_k) &= \sum_{i=1}^{J_{\gamma,k}} w_{\gamma,k}^i N(\mathbf{x}_k; \mathbf{m}_{\gamma,k}^i, \mathbf{P}_{\gamma,k}^i) \\
D_{S,k|k-1}(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}^{k-1}) &= \sum_{i=1}^{J_{k-1}} w_{S,k}^i N(\mathbf{x}_k; \mathbf{m}_{S,k}^i, \mathbf{P}_{S,k|k-1}^i) \\
[\mathbf{m}_{S,k}^i, \mathbf{P}_{S,k}^i] &= \text{KF}_P[\mathbf{m}_{k-1}^i, \mathbf{P}_{k-1}^i, \mathbf{F}_k, \mathbf{Q}_k] \\
w_{S,k}^i &= p_{S,k} w_{k-1}^i \\
D_{b,k|k-1}(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}^{k-1}) &= \sum_{i=1}^{J_{k-1}} w_{b,k}^i \sum_{j=1}^{J_{b,k}} N(\mathbf{x}_k; \mathbf{m}_{b,k}^{i,j}, \mathbf{P}_{b,k|k-1}^{i,j}) \\
\mathbf{m}_{b,k}^{i,j} &= \mathbf{F}_{b,k-1}^i + \mathbf{u}_{b,k}^j \\
\mathbf{P}_{b,k|k-1}^{i,j} &= \mathbf{F}_{b,k-1}^i \mathbf{P}_{b,k-1}^i (\mathbf{F}_{b,k-1}^i)^T + \mathbf{Q}_{b,k-1}^j
\end{aligned}$$

(3) 更新:

$$D_{klk}(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}^k) = (1 - p_{D,k}) D_{klk-1}(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}^{k-1}) + \sum_{z_k \in Z_k} (z_k) D_{z,k}(\mathbf{x}_k; z_k)$$

其中

$$\begin{aligned}
D_{z,k}(\mathbf{x}_k; z_k) &= \sum_{i=1}^{J_{klk-1}} w_k^i(z_k) N(\mathbf{x}_k; \mathbf{m}_{klk}^i(z_k), \mathbf{P}_{klk}^i) \\
w_k^i(z_k) &= \frac{p_{D,k} w_{klk-1}^i q_k^i(z_k)}{\lambda_k c_k(z_k) + p_{D,k} \sum_{j=1}^{J_{klk-1}} w_{klk-1}^j q_k^j(z_k)} \\
q_k^i(z_k) &= N(z_k; \mathbf{H}_k \mathbf{m}_{klk-1}^i, \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{klk-1}^i \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k) \\
[\mathbf{m}_{klk}^i(z_k), \mathbf{P}_{klk}^i] &= \text{KF}_E[z_k; \mathbf{m}_{klk-1}^i, \mathbf{P}_{klk-1}^i, \mathbf{H}_k, \mathbf{R}_k]
\end{aligned}$$

6.3.2 粒子 PHD 滤波

与粒子单目标跟踪相似,粒子 PHD 滤波通过粒子描述概率密度函数,并通过预测和更新步骤传递 PHD 滤波的概率密度函数。算法 39 详细描述了粒子 PHD 滤波。

算法 39 粒子 PHD 迭代方程

(1) k 时刻输入:

- ① \mathbf{Y}_k 为传感器观测输入;
- ② $k-1$ 时刻的权值和粒子分别为 w_{k-1}^i 和 $\mathbf{x}_{k-1}^i, i=1, 2, \dots, L_{k-1}$ 。

(2) **for** $i=1, 2, \dots, L_{k-1}$ **do**

- ① 采样 $\tilde{\mathbf{x}}_k^i \sim q_k(\cdot | \mathbf{x}_{k-1}^i, \mathbf{y}_k)$ 。

$$\textcircled{2} \tilde{w}_k^i = \frac{\phi_{k|k-1}(\tilde{\mathbf{x}}_k^i, \mathbf{x}_{k-1}^i)}{q_k(\tilde{\mathbf{x}}_k^i / \mathbf{x}_{k-1}^i)} w_{k-1}^i \circ$$

(3) end for

(4) for $i = L_{k-1} + 1, L_{k-1} + 2, \dots, L_{k-1} + sJ_k$ do

① 采样 $\tilde{\mathbf{x}}_k^i \simeq p_k(\cdot | \mathbf{y}_k)$;

$$\textcircled{2} \tilde{w}_k^i = \frac{1}{J_k} \frac{\gamma_k(\tilde{\mathbf{x}}_k^i)}{p_k(\tilde{\mathbf{x}}_k^i | \mathbf{y}_k)} \circ$$

(5) end for

其中:

① $p_k(\cdot | \mathbf{y}_k)$ 是重要性密度函数, 使 $\gamma_k(\hat{\mathbf{x}}_k^i) > 0$, 同时意味着 $p_k(\cdot | \mathbf{y}_k) > 0$;

② $q_k(\cdot | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{y}_k)$ 是重要性密度函数, 使 $\phi_{k|k-1}(\cdot | \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k-1}) > 0$ 意味着 $q_k(\cdot | \mathbf{x}_{k-1}^i, \mathbf{y}_k) > 0$;

③ $\phi_{k|k-1}(\cdot | \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k-1}) = p_{S,k}(\mathbf{x}_{k-1}) f_{k|k-1}(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) + b_{k|k-1}(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1})$;

④ J_k 表示新生目标的数目。

(6) for 每一个 $\mathbf{z}_k \in \mathbf{y}_k$ do

$$C(\mathbf{z}_k) = \sum_{j=1}^{L_{k-1}+J_k} \psi_{k,z_k}(\tilde{\mathbf{x}}_k^j) \tilde{w}_{k|k-1}^j$$

(7) end for

(8) for $i = 1, 2, \dots, L_{k-1}, J_k$ do

$$\tilde{w}_k^i = \left[1 - p_{D,k}(\tilde{\mathbf{x}}_k^i) + \frac{p_{D,k}(\tilde{\mathbf{x}}_k^i) f_k(\mathbf{z}_k | \tilde{\mathbf{x}}_k^i)}{\lambda_k c_k(\mathbf{z}_k) + C(\mathbf{z}_k)} \right] \tilde{w}_{k|k-1}^i$$

(9) end for

(10)

① 计算所有目标数目 $\hat{N}_{k|k} = \sum_{j=1}^{L_{k-1}+J_k} \tilde{w}_k^j$;

② 重采样 $\left\{ \frac{\tilde{w}_k^i}{\hat{N}_{k|k}}, \tilde{\mathbf{x}}_k^i \right\}_{i=1}^{L_{k-1}+J_k}$, 得到 $\left\{ \frac{w_k^i}{\hat{N}_{k|k}}, \mathbf{x}_k^i \right\}_{i=1}^{L_k}$ 。

③ 用 $\hat{N}_{k|k}$ 重新调整权值得 $\{w_k^i, \mathbf{x}_k^i\}_{i=1}^{L_k}$ 。

观察粒子 PHD 滤波的冲采样步骤可以发现, 更新后的权值 $\{w_k^i\}_{i=1}^{L_k}$ 的和不为 1, 而是 $\hat{N}_{k|k}$ 。更新粒子 $b \hat{\mathbf{x}}_k^i$ 是 ζ_k^i 的多次复制, 满足以下约束:

$$\sum_{i=1}^{L_{k-1}+J_k} \zeta_k^i = L_k$$

6.3.3 高斯混合 CPHD 滤波 (GMCPHD)

与 PHD 算法的 GMPHD 相似,CPHD 也存在 GMCPHD 算法。GMCPHD 由 Vo 等,2006^[159] 首先提出。GMCPHD 假定目标状态转换模型、传感器观测模型、目标存活/检测概率、目标新生强度函数与 GMPHD 的相同(如 6.3.1 节描述,注意在 CPHD 中没有它生目标强度函数)。此外,在 $k-1$ 时刻目标强度和势分布分别为

$$D_{k-1|k-1}(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{J_{k-1}} w_{k-1}^i N(\mathbf{x}_{k-1}; \mathbf{m}_{k-1}^i, \mathbf{P}_{k-1}^i)$$

和

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{k-1}(n)$$

基于以上假设,CPHD 转化为 GMCPHD。算法 40 描述了 GMCPHD 算法。

算法 40 GM CPHD 递推滤波方程

(1) k 时刻输入:

① $k-1$ 时刻的势分布 $\sum_{n=0}^{\infty} p_{k-1|k-1}(n)$;

② $k-1$ 时刻的强度函数 $D_{k-1|k-1}(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{y}^{k-1}) = \sum_{i=1}^{J_{k-1}} w_{k-1}^i N(\mathbf{x}_{k-1}; \mathbf{m}_{k-1}^i, \mathbf{P}_{k-1}^i)$ 。

(2) 预测:

$$p_{k|k-1}(n) = \sum_{j=0}^n p_{\gamma,k}(n-j) \prod_{kl|k-1} [D_{k-1|k-1}(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{y}^{k-1}), p_{k-1}](j)$$

$$D_{k|k-1}(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}^{k-1}) = D_{S,k|k-1}(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}^{k-1}) + \gamma_k(\mathbf{x}_k)$$

其中

$$\gamma_k(\mathbf{x}_k) = \sum_{i=1}^{J_{\gamma,k}} w_{\gamma,k}^i N(\mathbf{x}_k; \mathbf{m}_{\gamma,k}^i, \mathbf{P}_{\gamma,k}^i) \quad (6.8)$$

$$D_{S,k|k-1}(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}^{k-1}) = \sum_{i=1}^{J_{k-1}} w_{S,k}^i N(\mathbf{x}_k; \mathbf{m}_{S,k}^i, \mathbf{P}_{S,k|k-1}^i)$$

$$[\mathbf{m}_{S,k}^i, \mathbf{P}_{S,k|k-1}^i] = \text{KF}_P[\mathbf{m}_{k-1}^i, \mathbf{P}_{k-1}^i, \mathbf{F}_k, \mathbf{Q}_k]$$

$$w_{S,k}^i = p_{S,k} w_{k-1}^i$$

(3) 更新:

$$p_{k|k}(n) = \frac{W_k^0[D_{k|k-1}(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}^{k-1}); \mathbf{y}_k](n) p_{k|k-1}(n)}{\langle W_k^0[D_{k|k-1}(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}^{k-1}); \mathbf{y}_k](n), p_{k|k-1}(n) \rangle}$$

$$D_{k|k}(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}^k) = (1 - p_{D,k}(\mathbf{x}_k)) \frac{\langle W_k^1[\mathbf{w}_{k|k-1}, \mathbf{y}_k], p_{k|k-1} \rangle}{\langle W_k^0[\mathbf{w}_{k|k-1}, \mathbf{y}_k], p_{k|k-1} \rangle} D_{k|k-1}(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}^{k-1}) +$$

$$\sum_{z_k \in \gamma_k} D_{z,k}(\mathbf{x}_k; \mathbf{z}_k)$$

其中

$$\begin{aligned}
 D_{z,k}(\mathbf{x}_k; \mathbf{z}_k) &= \sum_{i=1}^{J_{klk-1}} w_k^i(\mathbf{z}_k) N(\mathbf{x}_k; \mathbf{m}_{klk}^i(\mathbf{z}_k), \mathbf{P}_{klk}^i) \\
 W_k^u[\mathbf{w}, \mathbf{y}](n) &= \sum_{j=0}^{\min(|\mathbf{y}|, n)} (|\mathbf{y}| - j)! p_{K,k}((|\mathbf{y}| - j)) \binom{n}{j+u}_p \times \\
 &\quad \frac{\langle 1 - p_{D,k}(\mathbf{x}_k), D \rangle^{n-(j+u)}}{\langle 1, \mathbf{w} \rangle^n} e_j(\Xi_k(\mathbf{w}, \mathbf{y}_k)) \\
 \psi_k(\mathbf{w}, \mathbf{z}) &= \left\{ \frac{\langle 1, \lambda_k c_k \rangle}{\lambda_k c_k(\mathbf{z}_k)} p_{D,k} \mathbf{w}^T q_k(\mathbf{z}) : \mathbf{z} \in \mathbf{y}_k \right\} \\
 \mathbf{w}_{klk-1} &= [w_{klk-1}^1, \dots, w_{klk-1}^{J_{klk-1}}]^T \\
 q_k(\mathbf{z}) &= [q_k^1(\mathbf{z}), \dots, q_k^{J_{klk-1}}(\mathbf{z})]^T \\
 q_k^i(\mathbf{z}) &= p_{D,k} w_{klk-1}^i q_k^i(\mathbf{z}_k) N(\mathbf{z}_k; \mathbf{H}_k \mathbf{m}_{klk-1}^i, \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{klk-1}^i \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k) \\
 w_k^i(\mathbf{z}_k) &= \frac{\langle W_k^1[\mathbf{w}_{klk-1}; \mathbf{y}_k \setminus \{\mathbf{z}_k\}], p_{klk-1} \rangle}{\langle W_k^0[\mathbf{w}_{klk-1}; \mathbf{y}_k], p_{klk-1} \rangle} \\
 [\mathbf{m}_{klk}^i(\mathbf{z}_k), \mathbf{P}_{klk}^i] &= \text{KF}_E[\mathbf{z}_k; \mathbf{m}_{klk-1}^i, \mathbf{P}_{klk-1}^i, \mathbf{H}_k, \mathbf{R}_k]
 \end{aligned}$$

6.3.4 航迹标签法

PHD 滤波避免了“航迹与观测”关联,因此降低了计算复杂度(与基于数据关联的多目标跟踪算法相比)。它迭代更新概率密度函数和状态估计。但是,更新概率密度函数和状态估计过程中没有保留航迹身份。为了传递航迹身份信息,估计出的状态需要与已有航迹进行关联,这一过程称为航迹标签或者航迹到估计的关联。假定在 k 时刻第 r 个航迹标记为 $\tau_{k,j,k}^r$, r 是从过去的某个时刻 k_s 开始存在的航迹标签。这个航迹的状态估计和协方差矩阵为 \mathbf{x}_{klk}^r 和 \mathbf{P}_{klk}^r , 有

$$\tau_{k,j,k}^r = \{\mathbf{x}_{klk}^r, \mathbf{P}_{klk}^r\}$$

令 k 时刻更新概率密度的峰值为一个序列 p_{klk} 。航迹标签法的基本思想是使峰值序列中的峰值与当前航迹列表中的航迹进行匹配。

一种方法是峰值到航迹的关联^[95]。这种方法对峰值与目标的预测位置进行检验。确认后的峰值用于更新当前目标。有效峰值多于一个时,利用原先目标的航迹历史初始化新航迹,并利用新有效峰值更新后的状态添加到航迹历史中去。可以使用一些限定条件来限制候选分配(Lin 等, 2006^[95])。此外,若一条航迹在一个预先设定的连续扫描周期内没有关联峰值,那么航迹终止。

另一种方法是利用更新权值 $w_{k/k}^i$ 来确定航迹到估计的关联关系(Panta 等, 2005^[135])。如果权值大于一个预先设定的门限,那么这个峰值为一个候选分配。

若不止一个峰值满足这个准则,那么用这个关联航迹的航迹历史初始化新航迹,新的峰值加入到列表当中。此外,若权值 $w_{k|k}^i$ 小于某个预先设定的门限或在一段连续扫描周期内这个航迹没有峰值与其关联,或者不满足这些准则的组合,那么航迹终止。

当一个峰值不与任何当前航迹关联时,两种算法均建立一条新航迹。航迹建立需要选择合适的初始权值,状态估计和协方差矩阵来满足特定的应用条件、限制条件和其他先验条件。

6.3.5 状态估计

PHD 迭代算法传递多目标后验概率密度的一阶矩。但是它没有直接给出目标的状态估计。目标状态需要在后验概率密度迭代计算出来之后单独计算。PHD 的状态估计过程如下所述。

在 k 时刻,概率密度函数的积分为目标数目的期望:

$$N_{k|k} = \sum_{i=0}^{J_{k|k}} w_{k|k}^i$$

式中: $J_{k|k}$ 为峰值数。

对于粒子 PHD 滤波算法,下一步是聚集现存粒子为 $N_{k|k}$ 个群,每一个群中心认为是目标状态的估计。对于 GMPHD,目标状态可以直接由 $N_{k|k}$ 个高斯分量的峰值得到。

与标准的 PHD 滤波相似,CPHD 也不能直接给出目标状态的估计。CPHD 传递后验概率密度的一阶矩和势分布函数。此外,为了消除杂波密集情况下的虚假峰值,CPHD 通过最大后验概率估计目标数目:

$$N_{k|k} = \arg \max_n p_{k|k}(n)$$

高斯混合 CPHD 选择 $N_{k|k}$ 个权值最大的高斯分量,这些高斯分量的峰则对应目标状态估计。

6.4 基于目标存在性的跟踪滤波

在随机集理论框架下,考虑目标状态的随机有限集 Γ_k ,它的唯一实例是单一事件 $x_k = \emptyset$ (表示没有目标)或者无限多事件 $x_k = \{x_k\}$ (状态为 x_k 的单目标), x_k 是表示目标状态的随机变量。传感器以概率 p_D 接收源自目标的目标观测信息,此外,还有杂波观测,它在空间均匀分布,检测概率为 p_{FA} (杂波检测概率)。记观测集为 Σ_k ,它的一个实例为 y_k , $|y_k| = m_k$,表示传感器在 k 时刻接收到 m_k 个观测。给定传感器观测,这里所考虑的问题为:在目标存在的情况下,确定目标状态的最优估计。应用这种形式来解决杂波背景下的单目标跟踪问题。

6.4.1 基于随机集的目标动态描述

基于随机集的目标运动模型由式(6.1)表示,其中, $B_k(\cdot)$ 表示目标新生过程。当 $X_{k-1} = \emptyset$ 或者 $X_{k-1} = \{\mathbf{x}_{k-1}\}$ 时(即单目标场景下没有新生目标的情况),定义 Γ_k 的实例为 $X_k = \emptyset$ 或者 $X_k = \{\mathbf{x}_k\}$,其概率分别为 $p_v = 1 - p_v$ 和 p_v 。因为没有目标新生过程,基于随机集合的运动模型可以表示为没有目标新生过程的 $\Phi(X_{k-1}, V_{k-1})$ 。这一模型包括了随机集的转变,当没有目标时,它一直为空集;当仅有一个目标时,那么这个目标将会以一定概率继续存在(以概率 p_v)或者消失(以概率 $1 - p_v$)。随机集 $\Phi(X_{k-1})$ 也包含目标一直存在的情况,如同 $\Phi(X_{k-1})$ 也可以为空集一样。有限随机目标状态集 Γ_k 的统计特性可由其信任质量函数表示:

$$\beta_{\Gamma_{k|k-1}}(S | X_{k-1}) = p(\Gamma_k \subseteq S)$$

这就是在 k 时刻空间 S 内所有目标的全概率公式。当至多存在一个目标时,如果目标在空间 S 内存在,那么它表示目标发现时的全概率公式。

若 $X_{k-1} = \emptyset$, Γ_k 为空集(假定在 $k-1$ 时刻目标不存在,这种情况将持续下去),信任质量函数可以表示为

$$\beta_{\Gamma_{k|k-1}}(S | \emptyset) = p(\Gamma_k = \emptyset \subseteq S) = 1$$

以概率密度的形式可以表示为

$$f_{k|k-1}(\emptyset | \emptyset) = \frac{\delta \beta_{\Gamma_{k|k-1}}(\emptyset)}{\delta \{\mathbf{x}_{k-1}\}}(\emptyset) = 1$$

另一方面,若 $X_{k-1} = \{\mathbf{x}_{k-1}\}$,那么 Γ_k 取值为两种情况:以概率 p_v 取 $\{\mathbf{x}_k\}$ 或者以 $1 - p_v$ 取 \emptyset 。这种情况下,信任测度可以表示为

$$\begin{aligned} \beta_{\Gamma_{k|k-1}}(S | \{\mathbf{x}_{k-1}\}) &= p(\Gamma_k = \emptyset \subseteq S | \{\mathbf{x}_{k-1}\}) + p(\Gamma_k = \{\mathbf{x}_k\} \subseteq S | \{\mathbf{x}_{k-1}\}) \\ &= 1 - p_v + p_v \int p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) d\mathbf{x}_k \end{aligned}$$

在目标最多为一个的情况下,完全马尔可夫转移概率密度可以表示为

$$\begin{aligned} f_{k|k-1}(\emptyset | \emptyset) &= 1 \\ f_{k|k-1}(\emptyset | \{\mathbf{x}_{k-1}\}) &= 1 - p_v \\ f_{k|k-1}(\{\mathbf{x}_k\} | \{\mathbf{x}_{k-1}\}) &= p_v p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) \end{aligned}$$

6.4.2 传感器观测随机集模型

令 Σ_k 表示传感器观测集合,它是源于目标的观测随机集 Σ'_k 和源于杂波的观测集 Λ_k 的并集。先考虑没有杂波的情况,如果没有杂波且目标存在,那么随机集 Σ'_k 的取值为:

- ① $\Sigma'_k = \{\mathbf{y}_k\}$,其中, \mathbf{y}_k 表示源于目标的观测,可能取任意值, $\mathbf{y}_k \in \mathbb{R}$ 。

$$\textcircled{2} \Sigma'_k = \emptyset。$$

实际上传感器检测不到目标的概率非零。由于检测过程的随机性,即使目标存在的情况下,传感器也可能检测不到目标。这个随机集的统计特性可以由信任测度表示 $\beta_{\Sigma'_k}(S|X_k) = p(\Sigma'_k \subseteq S)$ 。信任测度为在任意给定空间 S 的一个扫描周期内所有观测的全概率公式。若目标状态为 $x_k = \{x_k\}$, 则

$$\begin{aligned} \beta_{\Sigma'_k}(S|X_k) &= p(\Sigma'_k \subseteq S | \{x_k\}) \\ &= p(\Sigma'_k = \emptyset | \{x_k\}) + p(\Sigma'_k \neq \emptyset, \Sigma'_k \subseteq S | \{x_k\}) \end{aligned}$$

假定检测过程和观测过程相互独立,检测概率为 p_D , 那么

$$\begin{aligned} \beta_{\Sigma'_k}(S|X_k) &= p(\Sigma'_k = \emptyset | \{x_k\}) + p(\Sigma'_k \neq \emptyset | \{x_k\})p(\Sigma'_k \subseteq S | \{x_k\}) \\ &= 1 - p_D + p_D p_{\Sigma'_k}(S | \{x_k\}) \end{aligned}$$

考虑到杂波和虚警,观测集 Σ 的典型形式为

$$\Sigma_k = \Sigma'_k \cup \Lambda_k$$

式中: Σ'_k 为源于目标的观测随机集,它或者包含一个观测,或者取空集; Λ_k 为源于杂波的观测集。假定杂波观测源于杂波目标且可以像感兴趣的目標那样进行建模,但是它的噪声统计特性与真实目标不同。

对于杂波目标,零概率检测表示传感器没有检测到杂波目标。同样,杂波的检测概率为 1 则意味着杂波目标总是能产生杂波观测。因此,对于杂波目标,检测概率为 P_{FA} (称为虚警概率)。因此,一个杂波目标产生的观测随机集的信任测度与一个目标漏检时相同,对于一概率测度 $p_c(S)$, 有

$$\beta(S) = 1 - P_{FA} + P_{FA} p_c(S)$$

由此可见,典型的传感器观测集 $\Sigma_k = \Sigma'_k \cup \Lambda_k$, 其中, Σ'_k 模拟源于目标的观测,且 $\Lambda_k = \Lambda_k(1) \cup \Lambda_k(2) \cup \dots \cup \Lambda_k(M)$, 每一个 $\Lambda_k(j)$ 模拟在 k 时刻的一个杂波源。假定 $\Lambda_k(j)$ 具有相同的概率测度和虚警概率 P_{FA} , 源于目标的观测与杂波相互独立, 那么

$$\begin{aligned} \beta_{\Sigma_k}(S|X_k) &= p(\Sigma'_k, \Lambda_k \subseteq S) \\ &= p(\Sigma'_k \subseteq S)p(\Lambda_k \subseteq S) \\ &= p(\Sigma'_k \subseteq S)p(\Lambda_k(1) \subseteq S, \dots, \Lambda_k(M) \subseteq S) \\ &= p(\Sigma'_k \subseteq S)p(\Lambda_k(1) \subseteq S) \dots p(\Lambda_k(M) \subseteq S) \\ &= \beta_{\Sigma'_k}(S|X_k)\beta_c(S)M \end{aligned}$$

将这个函数微分可得全局似然函数 $f_{\Sigma_k}(y_k|x_k)$ 。但是这个信任函数为两个信任函数的乘积。利用集微分的乘法法则,可以得到

$$\begin{aligned} f_{\Sigma_k}(y_k|x_k) &= f_{\Sigma'_k \cup \Lambda_k}(y_k|x_k) \\ &= \sum_{Z_k \subseteq y_k} f_{\Sigma'_k}(Z_k|x_k)f_{\Lambda_k}(y_k - Z_k) \end{aligned} \quad (6.9)$$

杂波的全局概率密度为

$$f_{\Lambda_k}(\xi_1, \dots, \xi_n) = n! \binom{M}{n} P_{\text{FA}}^n (1 - P_{\text{FA}})^{M-n} c(\xi_1) \cdots c(\xi_n)$$

式中: $\binom{M}{n}$ 表示从 M 个元素中选出 n 个元素的组合数。如果杂波在观测空间 V 中的分布为均匀分布, 那么 $c(\xi_i) = 1/V$ 。全局概率密度简化为

$$f_{\Lambda_k}(\xi_1, \dots, \xi_n) = n! \frac{1}{V^n} \binom{M}{n} P_{\text{FA}}^n (1 - P_{\text{FA}})^{M-n}$$

如果 M 大而 P_{FA} 小, 则 Λ 可以用一个泊松过程来近似, 这种情况下, 全局概率密度可进一步简化为

$$f_{\Lambda_k}(\xi_1, \dots, \xi_n) = n! \frac{1}{V^n} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$$

如果杂波数为 m_k , 记 $f_{\Lambda_k}(\xi_1, \dots, \xi_n)$ 为 $p_c(m_k)$, 那么杂波密度为

$$p_c(m_k) = \frac{\lambda^{m_k} e^{-\lambda}}{V^{m_k}} \quad (6.10)$$

注意 $p_c(m_k) = p_c(m_k - 1) \lambda / V$ 。

目标观测过程的似然函数为

$$\begin{aligned} \beta_{\Sigma'_k}(\mathcal{S} | X_k) &= p(\Sigma'_k = \emptyset | \{\mathbf{x}_k\}) + p(\Sigma'_k \neq \emptyset | \{\mathbf{x}_k\}) p(\Sigma'_k \subseteq \mathcal{S} | \{\mathbf{x}_k\}) \\ &= 1 - p_D + p_D p_{\Sigma'_k}(\mathcal{S} | \{\mathbf{x}_k\}) \\ &= f(\emptyset | \mathbf{x}_k) + \int_{\mathcal{S}} f(\{y_k\} | \mathbf{x}_k) \end{aligned}$$

它表明似然函数可以表示为

$$f(\emptyset | \mathbf{x}_k) = 1 - p_D \quad (6.11)$$

$$\begin{aligned} f(\{y_k\} | \mathbf{x}_k) &= \frac{\delta}{\delta\{y_k\}} p_D p_{\Sigma'_k}(\mathcal{S} | \{\mathbf{x}_k\}) \\ &= p_D p(y_k | \mathbf{x}_k) \end{aligned} \quad (6.12)$$

当目标存在时, 即 $\mathbf{x}_k = \{\mathbf{x}_k\}$, 将式(6.10)、式(6.11)、式(6.12)代入式(6.9), 整个似然函数可以表示为

$$\begin{aligned} f_{\Sigma_k}(y_k | \mathbf{x}_k) &= f_{\Sigma'_k \cup \Lambda_k}(y_k | \mathbf{x}_k) \\ &= f_{\Sigma_k}(\emptyset | \mathbf{x}_k) f_{\Lambda_k}(y_k(1), \dots, y_k(m_k)) + \\ &\quad \sum_i f_{\Sigma'_k}(y_k(i) | \mathbf{x}_k) f_{\Lambda_k}(y_k - \{y_k(i)\}) \end{aligned}$$

利用 $Z_k = \{y_k(i)\} \equiv \{\text{观测 } i \text{ 来自于目标且值为 } y_k(i)\}$, 可得

$$f_{\Sigma_k}(y_k | \mathbf{x}_k) = p_c(m_k) (1 - p_D) + p_c(m_{k-1}) \left(p_D \sum_{i=1}^{m_k} p(y_k(i) | \mathbf{x}_k) \right)$$

$$= p_c(m_k) \left((1 - p_D) + \frac{p_D V}{\lambda} \sum_{i=1}^{m_k} p(y_k(i) | x_k) \right)$$

当目标不存在时, $x_k = \emptyset$, 典型观测随机集 Σ_k 有以下一般形式:

$$\Sigma_k = \Sigma'_k \cup \Lambda_k$$

但是不像目标存在时那样, Σ' 只取一个值, $\Sigma'_k = \emptyset$ 。在似然函数中没有目标存在的贡献, 即

$$\begin{aligned} f_{\Sigma_k}(y_k | \emptyset) &= f_{\Sigma'_k \cup \Lambda_k}(y_k | \emptyset) \\ &= f_{\Lambda_k}(y_k | \emptyset) = p_c(m_k) = \frac{\lambda^{m_k} e^{-\lambda}}{V^{m_k}} \end{aligned}$$

6.4.3 贝叶斯更新

贝叶斯递推一般形式如式(6.3)所示:

$$\begin{aligned} f_{k|k}(x_k | y^k) &= \frac{1}{\Delta} f_{\Sigma_k}(y_k | x_k) \int f_{k|k-1}(x_k | X_{k-1}) f_{k-1|k-1}(X_{k-1} | y^{k-1}) \delta X_{k-1} \\ &= \frac{1}{\Delta} f_{\Sigma_k}(y_k | x_k) \{ f_{k|k-1}(x_k | \emptyset) f_{k|k-1}(\emptyset | y^{k-1}) + \\ &\quad \int f_{k|k-1}(x_k | \{x_{k-1}\}) f_{k-1|k-1}(\{x_{k-1}\} | y^{k-1}) \delta X_{k-1} \} \end{aligned}$$

后验密度 $f_{k|k}(x_k | y^k)$ 可能的形式有:

- (1) $f_{k|k}(\emptyset | y^k)$ = 没有目标存在时的后验概率密度;
- (2) $f_{k|k}(\{x_k\} | y^k)$ = 仅有一个目标且状态为 $\{x_k\}$ 时的后验概率密度。

其中, $f_{k|k}(x_k | y^k)$ 满足

$$\int f_{k|k}(x_k | y^k) \delta x_k = f_{k|k}(\emptyset | y^k) + \frac{1}{1!} \int f_{k|k}(\{x_k\} | y^k) \delta x_k = 1 \quad (6.13)$$

因而有

$$\begin{aligned} f_{k|k}(\{x_k\} | y^k) &= \frac{1}{\Delta} f_{\Sigma}(y_k | \{x_k\}) f_{k|k-1}(\{x_k\} | \emptyset) f_{k|k-1}(\emptyset | y^{k-1}) + \\ &\quad \frac{1}{\Delta} f_{\Sigma}(y_k | \{x_k\}) \times \\ &\quad \left(\int f_{k|k-1}(\{x_k\} | \{x_{k-1}\}) f_{k-1|k-1}(\{x_{k-1}\} | y^{k-1}) dX_{k-1} \right) \\ &= \frac{p_c(m_k)}{\Delta} \left((1 - p_D) + \frac{p_D V}{\lambda} \sum_{i=1}^{m_k} p(y_k(i) | x_k) \right) \times \\ &\quad \left(0 + p_v \int p(x_k | x_{k-1}) p(x_{k-1} | y^{k-1}) d x_{k-1} \right) \\ &= \frac{p_c(m_k) p_v}{\Delta} \left((1 - p_D) + \frac{p_D V}{\lambda} \sum_{i=1}^{m_k} p(y_k(i) | x_k) \right) \times \end{aligned}$$

$$\int p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{y}^{k-1}) d\mathbf{x}_{k-1}$$

很明显,从式(6.13)可得

$$f_{k|k}(\emptyset | \mathbf{y}^k) = 1 - \int f(\{\mathbf{x}_k\} | \mathbf{y}^k)$$

对后验概率密度 $f_{k|k}(\{\mathbf{x}_k\} | \mathbf{y}^k)$ 微分同时得到 $f_{k|k}(\emptyset | \mathbf{y}^k)$ 。最后两个方程构成了目标存在不确定性下的单目标跟踪贝叶斯滤波方程。目标存在的后验概率密度为

$$p_v(\text{posterior}) = f_{k|k}(\{\mathbf{x}_k\} | \mathbf{y}^k)$$

在线性高斯假设条件下,我们可以推导集成概率数据关联滤波算法(IPDA),如6.4.4节所示。

6.4.4 集成概率数据关联滤波

集成概率数据关联由 Mušicki 等(1994^[115])提出,它是在 PDAF(Bar-Shalom 和 Fortmann,1988^[7])中引入目标存在性的概念推导出来的。但是,相同的滤波算法也可以在随机集框架下通过近似并在目标存在性中引入马尔可夫链模型进行推导。Mahler(2000^[100])提出的随机有限集目标运动模型包含随机集演化模型,当观测场景中没有目标时,这种情景将持续下去;当观测场景中存在一个目标时,那么目标将继续存在(以概率 p_v)或目标消失(以概率 $1 - p_v$)。这些概率定义就是 Goodman(1997^[60])等提出的目标持续性概念。这些参数与 IPDA 中目标存在性的马尔可夫链直接相关。目标存在性和持续性模拟了同一件事情,即如果目标不存在,那么将一直不存在;如果目标存在,那么它以一定的概率持续存在或消失。从这里可以看出,Goodman 等(1997^[60])提出的目标持续性概率 p_v 与 Mušicki 等(1994^[115])提出的目标存在性概率没有差别。IPDA 中的马尔可夫链用来作为传感器扫描间的目标存在性概率的演进模型。在 IPDA 的原始工作中,提出了两种马尔可夫链模型:马尔可夫链 1 和马尔可夫链 2。马尔可夫链 2 同时处理目标存在性和观测性问题。这里主要研究马尔可夫链 1。在这种马尔可夫模型下,所有包含目标存在性概率的方程都将恒定的目标存在性概率 p_v 替换为动态变化的目标存在性概率 $p_{k|k-1,v}$ 。

在 IPDA 的原始推导中,目标存在性(持续性)定义为一个取值为 λ_k 和 $\bar{\lambda}_k$ 的随机变量,分别表示目标存在(持续)和目标不存在(不持续)。马尔可夫链定义了这些状态随时间的转换:

$$\begin{bmatrix} p(\lambda_k) \\ p(\bar{\lambda}_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p(\lambda_{k-1}) \\ p(\bar{\lambda}_{k-1}) \end{bmatrix}$$

需要指出的是,在所有报道的 IPPA 工作中,从目标不存在到目标存在的转换概率均为零,从不存在到存在的转换概率都是 1。它事实上排除了目标从不存在状态到目标存在转移的情况,强化了存在性和持续性二者之间等效性。因此,目标

持续性概率等于目标存在性概率。由于它们通过马尔可夫链在时间上进行转换。需要定义目标存在性三方面的问题：

(1) 目标存在和不存在的先验概率分别为 $p_{k-1|k-1,v}$ 和 $p_{k-1|k-1,\bar{v}}$ ；

(2) 目标存在和不存在的预测概率分别为 $p_{k|k-1,v}$ 和 $p_{k|k-1,\bar{v}}$ ；

(3) 目标存在和不存在的后验概率分别为 $p_{k|k,v}$ 和 $p_{k|k,\bar{v}}$ 。

令 $p(\lambda_k) = p_{k|k-1,v}$ ，将马尔可夫链引入到随机集理论框架中并假定线性高斯假设条件，可以推导出 IPDA。马尔可夫转移概率密度为

$$\begin{bmatrix} p_{k|k-1,v} \\ p_{k|k-1,\bar{v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & 0 \\ 1 - \gamma_{11} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{k-1|k-1,v} \\ p_{k-1|k-1,\bar{v}} \end{bmatrix}$$

上式有一个自由参数量 γ_{11} ，目标存在预测概率为

$$\begin{aligned} p_{k|k-1,v} &= \gamma_{11} p_{k-1|k-1,v} + 0 \cdot p_{k-1|k-1,\bar{v}} \\ &= \gamma_{11} p_{k-1|k-1,v} \end{aligned}$$

目标不存在的预测概率为

$$p_{k|k-1,\bar{v}} = \gamma_{11} p_{k-1|k-1,v} + 1 \times p_{k-1|k-1,\bar{v}} = (1 - \gamma_{11}) p_{k-1|k-1,v} + p_{k-1|k-1,\bar{v}}$$

因所有算法在实际应用中都利用波门技术，只考虑落入所选波门内的观测，检测概率 p_D 需要进行修正，需要包含源目标的观测落入波门内的概率 p_G ，那么全概率变为 $p_G p_D$ ，在所有方程中用 $p_G p_D$ 代替 p_D 。

通过简化，后验概率密度可以表示为

$$\begin{aligned} f_{k|k}(\{\mathbf{x}_k\} | \mathbf{y}^k) &= \frac{p_c(m_k) p_{k|k-1,v}}{\Delta} \left((1 - p_G p_D) + \frac{p_G p_D V}{\lambda} \sum_{i=1}^{m_k} p(\mathbf{y}_k(i) | \mathbf{x}_k) \right) \times \\ &\quad \int p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{y}^{k-1}) d\mathbf{x}_{k-1} \end{aligned}$$

积分项与 Chapman - Kolmogorov 积分相同，若 $p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{y}^{k-1})$ 和 $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1})$ 是高斯分布，则积分项可以表示为高斯形式。基于以上高斯分布假设，Chapman - Kolmogorov 积分与卡尔曼预测方程相等，可以得到高斯概率密度分布 $N(\mathbf{x}_k; \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{P}_{k|k-1})$ 。

1. 似然函数

若传感器观测与目标状态为线性关系且观测噪声为高斯分布的加性噪声，那么似然函数可以表示为

$$p(\mathbf{y}_k(i) | \mathbf{x}_k) = N(\mathbf{y}_k(i); \mathbf{H} \mathbf{x}_k, \mathbf{R}_k)$$

似然函数也是高斯分布的，其中， \mathbf{H} 为观测矩阵， \mathbf{R}_k 为观测噪声协方差矩阵。

2. 条件密度

基于以上假设，后验概率密度可以进一步简化为

$$\begin{aligned} f_{k|k}(\{\mathbf{x}_k\} | \mathbf{y}^k) &= \frac{p_c(m_k) p_{k|k-1,v}}{\Delta} \left((1 - p_G p_D) + \frac{p_G p_D V}{\lambda} \sum_{i=1}^{m_k} N(\mathbf{y}_k^i; \mathbf{H} \mathbf{x}_k, \mathbf{R}_k) \right) \times \\ &\quad N(\mathbf{x}_k; \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{P}_{k|k-1}) \end{aligned}$$

若定义 $\Lambda_k^i = N(y_k(i); \hat{y}_k, S_k)$, 其中

$$\hat{y}_k = H\hat{x}_{k|k-1}$$

$$S_{k|k} = H P_{k|k-1} H^T + R_k$$

则后验概率密度可以进一步简化为

$$f_{k|k}(x_k | y^k) = \frac{p_c(m_k)p_{k|k-1,v}}{\Delta}(1 - p_G p_D) N(x_k; \hat{x}_{k|k-1}, P_{k|k-1}) + \\ \frac{p_c(m_k)p_{k|k-1,v}}{\Delta} \frac{p_G p_D V}{\lambda} \sum_{i=1}^{m_k} N(y_k(i); H x_k, R_k) N(x_k; \hat{x}_{k|k-1}^i, P_{k|k-1}^i)$$

更新概率密度可以写为简化形式, 即

$$f_{k|k}(x_k | y^k) = \beta_{k,v}(0) N(x_k; \hat{x}_{k|k-1}, P_{k|k-1}) + \sum_{i=1}^{m_k} \beta_{k,v}(i) N(x_k; \hat{x}_{k|k-1}^i, P_{k|k-1}^i)$$

上述方程与 5.7.3 节的相同。

β_i 通常称为数据关联概率, 表示如下:

$$\beta_{k,\bar{v}}(0) = \frac{p_c(m_k)p_{k|k-1,\bar{v}}}{\Delta}$$

$$\beta_{k,v}(0) = \frac{p_c(m_k)p_{k|k-1,v}}{\Delta}(1 - p_G p_D)$$

$$\beta_{k,v}(i) = \frac{p_c(m_k)p_{k|k-1,v}}{\Delta} \frac{p_G p_D V}{\lambda} \Lambda_k^i$$

$$\beta_{k,\bar{v}}(0) + \beta_{k,v}(0) + \sum_{i=1}^{m_k} \beta_{k,v}(i) = 1$$

归一化因子可以表示为

$$\Delta = p_c(m_k)p_{k|k-1,\bar{v}} + p_c(m_k)p_{k|k-1,v}(1 - p_G p_D) + p_c(m_k)p_{k|k-1,v} \frac{p_G p_D V}{\lambda} \Lambda_k^i$$

因 $p_{k|k-1,\bar{v}} + p_{k|k-1,v} = 1$, 且 $\delta_k = p_G p_D - \sum_{i=1}^{m_k} \frac{p_G p_D V}{\lambda} \Lambda_k^i$, 则

$$\Delta = p_c(m_k)(1 - \delta_k p_{k|k-1,v})$$

代入后可得

$$\beta_{k,\bar{v}}(0) = \frac{p_{k|k-1,\bar{v}}}{(1 - \delta_k p_{k|k-1,v})}$$

$$\beta_{k,v}(0) = \frac{p_{k|k-1,v}}{(1 - \delta_k p_{k|k-1,v})}(1 - p_G p_D)$$

$$\beta_{k,v}(i) = \frac{p_{k|k-1,v}}{(1 - \delta_k p_{k|k-1,v})} \frac{p_G p_D V}{\lambda} \Lambda_k^i$$

可见数据关联概率与 5.7.3 节相同。

目标存在性的后验概率为

$$\begin{aligned} \int f_{k|k}(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}^k) &= \int \beta_{k,v}(0) N(\mathbf{x}_k; \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{P}_{k|k-1}) + \sum_{i=1}^{m_k} \beta_{k,v}(i) N(\mathbf{x}_k; \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^i, \mathbf{P}_{k|k}^i) \\ &= \beta_{k,v}(0) + \sum_{i=1}^{m_k} \beta_{k,v}(i) \end{aligned}$$

于是

$$p_{k|k,v} = \frac{(1 - \delta_k) p_{k|k-1,v}}{1 - \delta_k p_{k|k-1,v}}$$

目标存在性的后验概率与 5.7.3 节完全相同。

这样,在线性高斯假设条件下,杂波背景单目标跟踪的 IPDA 随机集在论框架下就推导出来了。

6.4.5 从 GMPHD 滤波推导 JIPDA

在 6.4.4 节已经从随机集理论推导了 IPDA,揭示了两种理论框架之间的联系。类似地,在多目标跟踪背景下,JIPDA 也可以从 GMPDH 推导而来(Chakravorty 和 Challa,2009)。本节将讨论两种算法之间的理论联系,利用 GMPHD 的步骤得出 JIPDA 方程,需要以下条件:

- (1) 每个目标的运动模型为线性高斯模型;
- (2) 目标存活和检测概率与目标状态独立;
- (3) 没有目标新生和它生事件。

1. JIPDA 与 PHD

在 IPDA 中,目标状态包含运动参数(位置、速度等)和存在性。IPDA 提供了传递联合密度的表达式,即

$$p(\mathbf{x}_{k-1}, \chi_{k-1} = 1 | Z_{1:k-1}) = p(\chi_{k-1} = 1 | Z_{1:k-1}) p(\mathbf{x}_{k-1} | Z_{1:k-1}) \quad (6.14)$$

式中: \mathbf{x}_{k-1} 表示目标运动状态; $\chi_{k-1} = 1$ 表示目标存在, $\chi_{k-1} = 0$ 表示目标不存在。在 IPDA 中,假定目标状态概率密度为高斯分布。因此式(6.14)可以表示为

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_{k-1}, \chi_{k-1} = 1 | Z_{1:k-1}) &= p(\chi_{k-1} = 1 | Z_{1:k-1}) p(\mathbf{x}_{k-1} | Z_{1:k-1}) \\ &= w_{k-1} N(\mathbf{x}_{k-1}; \mathbf{m}_{k-1}, \mathbf{P}_{k-1}) \end{aligned} \quad (6.15)$$

式中: $w_{k-1} = p(\chi_{k-1} | Z_{1:k-1})$ 。在多目标跟踪环境下,每个目标由式(6.15)表示。 N 个目标符合式(6.15)概率分布的联合密度可以表示为

$$\sum_{i=1}^N w_{k-1}^i N(\mathbf{x}_{k-1}; \mathbf{m}_{k-1}^i, \mathbf{P}_{k-1}^i) \quad (6.16)$$

联合密度式(6.16)可以表示为目标强度函数。为了问题的方便(但不失一般性),假定有两个目标, $N=2$ 。图 6.1 分别用虚线和实线绘出了两个目标各自的密度函数和两个目标的合成密度曲线。

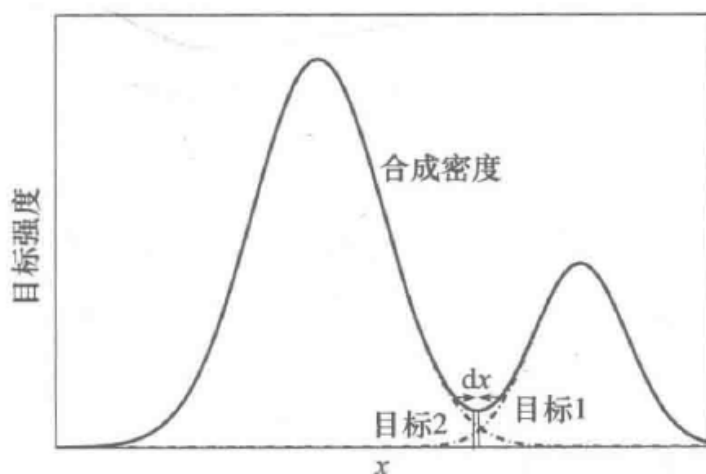


图 6.1 状态空间中目标的强度

在图 6.1 中, 每个虚线代表联合密度中各分量的概率密度 $N(\mathbf{x}_{k-1}; \mathbf{m}_{k-1}^i, \mathbf{P}_{k-1}^i)$, 因此联合密度积分值不为 1。联合密度函数解释如下: 在一个无限小的状态空间 $d\mathbf{x}$ 上, 目标强度为

$$\sum_{i=1}^N w_{k-1}^i N(\mathbf{x}_{k-1}; \mathbf{m}_{k-1}^i, \mathbf{P}_{k-1}^i) |_{x_{k-1}=dx_{k-1}} d\mathbf{x}_{k-1}$$

因此, 在整个状态空间上述表达式的积分为状态空间内所有目标数目的和:

$$\int \sum_{i=1}^N w_{k-1}^i N(\mathbf{x}_{k-1}; \mathbf{m}_{k-1}^i, \mathbf{P}_{k-1}^i) d\mathbf{x}_{k-1} = \sum_{i=1}^N w_{k-1}^i$$

因此, 由 IPDA 滤波推出的联合密度函数式(6.16)符合 PHD 的定义。联合密度可以称为概率假设密度, 与 PHD 的术语一致, 联合密度函数可以表示为

$$D_{k-1|k-1}(\mathbf{x}_{k-1} | Z_{1:k-1}) = \sum_{i=1}^N w_{k-1}^i N(\mathbf{x}_{k-1}; \mathbf{m}_{k-1}^i, \mathbf{P}_{k-1}^i)$$

在 IPDA 中:

- (1) w_{k-1}^i 表示第 i 个目标的先验存在概率;
- (2) $N(\mathbf{x}_{k-1}; \mathbf{m}_{k-1}^i, \mathbf{P}_{k-1}^i)$ 表示第 i 个目标的先验目标状态概率密度。

2. JIPDA 推导

基于 6.4.5 节建立的 IPDA 的联合目标状态密度函数和 PHD 之间的等效关系, 在某些假设条件下, 利用 6.3.1 节的 GMPHD 推导出 JIPDA 算法。这些近似假设条件如下:

- (1) 每个目标的运动模型为线性高斯模型;
- (2) 目标存活和检测概率与目标状态独立;
- (3) 没有目标新生和它生事件。

这些近似条件与 GMPHD 的 $\gamma_k(\mathbf{x}_k) = 0$ 和 $D_{b,k|k-1}(\mathbf{x}_k | Z_{1:k-1}) = 0$ 相同。因此, GMPHD 的迭代形式适用于推导 JIPDA。假定初始强度函数为 $D_{k-1|k-1}(\mathbf{x}_{k-1} | Z_{1:k-1})$, 则

$$D_{k|k-1}(\mathbf{x}_k | Z_{1:k-1}) = D_{S,k|k-1}(\mathbf{x}_k | Z_{1:k-1}) + D_{b,k|k-1}(\mathbf{x}_k | Z_{1:k-1}) + \gamma_k(\mathbf{x}_k) \quad (6.17)$$

在 IPDA 中没有明确地给出目标的新生和它生。因此,对应的强度函数为 $D_{b,k|k-1}(\mathbf{x}_k | Z_{1:k-1}) = 0$ 和 $\gamma_k(\mathbf{x}_k) = 0$ 。但是,目标的存在概率为 $p_{S,k}$,以及对应的预测概率密度为

$$D_{S,k|k-1}(\mathbf{x}_k | Z_{1:k-1}) = \sum_{i=1}^N w_{k|k-1}^i N(\mathbf{x}_k; \mathbf{m}_{S,k}^i, \mathbf{P}_{S,k|k-1}^i) \quad (6.18)$$

$$[\mathbf{m}_{S,k}^i, \mathbf{P}_{S,k|k-1}^i] = KF_{pred}[\mathbf{F}_{k-1}, \mathbf{m}_{k-1}^i, -, \mathbf{P}_{k-1}^i, \mathbf{Q}_{k-1}] \quad (6.19)$$

$$w_{k|k-1}^i = p_{S,k} w_{k-1}^i \quad (6.20)$$

根据式(6.17),可得预测概率密度为

$$D_{k|k-1}(\mathbf{x}_k | Z_{1:k-1}) = \sum_{i=1}^N w_{k|k-1}^i N(\mathbf{x}_k; \mathbf{m}_{S,k}^i, \mathbf{P}_{S,k|k-1}^i) \quad (6.21)$$

3. 更新

$$\begin{aligned} D_{k|k}(\mathbf{x}_k | Z_{1:k}) &= (1 - p_{D,k}) D_{k|k-1}(\mathbf{x}_k | Z_{1:k-1}) + \sum_{z_k \in Z_k} D_{z,k}(\mathbf{x}_k; z_k) \\ &= \sum_{i=1}^N (1 - p_{D,k}) w_{k|k-1}^i N(\mathbf{x}_k; \mathbf{m}_{S,k}^i, \mathbf{P}_{S,k|k-1}^i) + \\ &\quad \sum_{z_k \in Z_k} \left[\frac{\sum_{i=1}^N \frac{p_{D,k} w_{k|k-1}^i q_k^i(z_k)}{\lambda_k c_k(z_k) + p_{D,k} \sum_{j=1}^N w_{k|k-1}^j q_k^j(z_k)} N(\mathbf{x}_k; \mathbf{m}_{k|k}^i(z_k), \mathbf{P}_{k|k}^i(z_k))}{\lambda_k c_k(z_k) + p_{D,k} \sum_{j=1}^N w_{k|k-1}^j q_k^j(z_k)} \right] \\ &= \sum_{i=1}^N w_{k|k-1}^i \left[(1 - p_{D,k}) N(\mathbf{x}_k; \mathbf{m}_{S,k}^i, \mathbf{P}_{S,k|k-1}^i) + \right. \\ &\quad \left. \sum_{z_k \in Z_k} \frac{p_{D,k} q_k^i(z_k)}{\lambda_k c_k(z_k) + p_{D,k} \sum_{j=1}^N w_{k|k-1}^j q_k^j(z_k)} N(\mathbf{x}_k; \mathbf{m}_{k|k}^i(z_k), \mathbf{P}_{k|k}^i(z_k)) \right] \\ &= \sum_{i=1}^N [w_{k|k-1}^i \hat{\beta}_{k,0}^i N(\mathbf{x}_k; \mathbf{m}_{S,k}^i, \mathbf{P}_{S,k|k-1}^i) + \\ &\quad \sum_{z_k \in Z_k} w_{k|k-1}^i \hat{\beta}_{k,z_k}^i N(\mathbf{x}_k; \mathbf{m}_{k|k}^i(z_k), \mathbf{P}_{k|k}^i(z_k))] \quad (6.22) \end{aligned}$$

式中

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_{k,0}^i &= (1 - p_{D,k}) \\ \hat{\beta}_{k,z_k}^i &= \frac{p_{D,k} q_k^i(z_k)}{\lambda_k c_k(z_k) + p_{D,k} \sum_{j=1}^N w_{k|k-1}^j q_k^j(z_k)} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{m}_{k|k}^i(z_k) \\ \mathbf{P}_{k|k}^i(z_k) \end{bmatrix} &= KF_{update}[\mathbf{m}_{k|k-1}^i, z_k, \mathbf{H}_k, \mathbf{P}_{k|k-1}^i] \end{aligned}$$

4. JIPDA 近似

通过 GMPHD 滤波得到了如式(6.22)所示的高斯混合概率密度表达式。下一

步是 GMPHD 的“航迹 - 峰值”分配^[95]或者数据关联方案^[135]。但是, IPDA 将式(6.22)中的每个高斯分量 i 的和近似为单高斯分布函数。对于第 i 个目标, 状态更新概率密度是高斯和的形式。这种近似方法可以由式(6.22)得到:

$$\begin{aligned}
 & \left[w_{k|k-1}^i \hat{\beta}_{k,0}^i N(\mathbf{x}_k; \mathbf{m}_{S,k}^i, \mathbf{P}_{S,k|k-1}^i) + \sum_{z_k \in Z_k} w_{k|k-1}^i \hat{\beta}_{k,z_k}^i N(\mathbf{x}_k; \mathbf{m}_{k|k}^i(z_k), \mathbf{P}_{k|k}^i) \right] \\
 &= \left[\hat{\beta}_{k,0}^i + \sum_{z_k \in Z_k} \hat{\beta}_{k,z_k}^i \right] w_{k|k-1}^i \times \\
 & \quad \left[\hat{\beta}_{k,0}^i N(\mathbf{x}_k; \mathbf{m}_{S,k}^i, \mathbf{P}_{S,k|k-1}^i) \sum_{z_k \in Z_k} \hat{\beta}_{k,z_k}^i N(\mathbf{x}_k; \mathbf{m}_{k|k}^i(z_k), \mathbf{P}_{k|k}^i) \right] \\
 &= w_{k|k}^i N(\mathbf{x}_k; \mathbf{m}_{k|k}^i, \mathbf{P}_{k|k}^i)
 \end{aligned}$$

其中

$$w_{k|k}^i = \left[\hat{\beta}_{k,0}^i + \sum_{z_k \in Z_k} \hat{\beta}_{k,z_k}^i \right] w_{k|k-1}^i \quad (6.23)$$

$$\beta_{k,0}^i = \frac{\hat{\beta}_{k,0}^i}{\hat{\beta}_{k,0}^i + \sum_{z_k \in Z_k} \hat{\beta}_{k,z_k}^i} \quad (6.24)$$

$$\beta_{k,z_k}^i = \frac{\hat{\beta}_{k,z_k}^i}{\hat{\beta}_{k,0}^i + \sum_{z_k \in Z_k} \hat{\beta}_{k,z_k}^i} \quad (6.25)$$

$$\mathbf{m}_{k|k}^i = \beta_{k,0}^i \mathbf{m}_{S,k}^i + \sum_{z_k \in Z_k} \beta_{k,z_k}^i \mathbf{m}_{k|k}^i(z_k) \quad (6.26)$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}_{k|k}^i &= \beta_{k,0}^i (\mathbf{P}_{S,k|k-1}^i + (\mathbf{m}_{S,k}^i - \mathbf{m}_{k|k}^i)(\mathbf{m}_{S,k}^i - \mathbf{m}_{k|k}^i)') + \\
 & \quad \sum_{z_k \in Z_k} \beta_{k,z_k}^i (\mathbf{P}_{k|k}^i + (\mathbf{m}_{k|k}^i(z_k) - \mathbf{m}_{k|k}^i)(\mathbf{m}_{k|k}^i(z_k) - \mathbf{m}_{k|k}^i)') \quad (6.27)
 \end{aligned}$$

更新概率密度式(6.22)可以通过代入式(6.23)中的近似更新高斯表示为

$$D_{k|k}(\mathbf{x}_k | Z_{1:k}) = \sum_{i=1}^N w_{k|k}^i N(\mathbf{x}_k; \mathbf{m}_{k|k}^i, \mathbf{P}_{k|k}^i) \quad (6.28)$$

在 JIPDA 中:

- (1) $w_{k|k}^i$ 是第 i 个目标的后验存在概率, $w_{k|k}^i = p(\chi_k^i = 1 | Z_{1:k})$;
- (2) $\beta_{k,0}^i, \beta_{k,z_k}^i$ 表示第 i 个目标的联合数据关联概率。

5. JIPDA 航迹管理

N 个目标的目标状态和存在概率更新如式(6.28)所示。为提供航迹质量的测度, JIPDA 基于存在概率 $w_{k|k}^i$ 对航迹分类, 一般分类形式如下所示:

- (1) 若 $w_{k|k}^i \geq \gamma_{\text{conf}}$ 则为确认航迹;
- (2) 若 $w_{k|k}^i < \gamma_{\text{term}}$ 则航迹终止;
- (3) 若 $\gamma_1 \leq w_{k|k}^i \leq \gamma_2$ 则为临时航迹。

其中, $\gamma(\cdot)$ 为预先设定的门限。

此外,若许多航迹距离很近或者在连续几个扫描周期内具有共同的观测,那么可以合并这些航迹。一旦应用航迹管理,那么所有 N 个目标或者一部分目标将在下一个扫描周期内存在。那么式(6.28)可以修正为

$$D_{klk}(\mathbf{x}_k | Z_{1:k}) = \sum_{i=1}^M w_{klk}^i \mathcal{N}(\mathbf{x}_k; \mathbf{m}_{klk}^i, \mathbf{P}_{klk}^i) \quad (6.29)$$

其中, $M \leq N$ 。

此外, JIPDA 没有明确地建立目标的新生和它生的模型。但是,在 k 时刻它通过合适的方法初始化新生目标(9.4 节将详细讨论)。每一个新生目标将分配一个确定的存在概率和初始化状态概率密度(高斯分布)。这些初始化的目标被添加到整个目标概率密度函数中,最后后验概率密度表达式为

$$\begin{aligned} D_{klk}(\mathbf{x}_k | Z_{1:k}) &= \sum_{i=1}^M w_{klk}^i \mathcal{N}(\mathbf{x}_k; \mathbf{m}_{klk}^i, \mathbf{P}_{klk}^i) + \sum_{j=1}^{M_{\text{new}}} w_{klk}^j \mathcal{N}(\mathbf{x}_k; \mathbf{m}_{klk}^j, \mathbf{P}_{klk}^j) \\ &= \sum_{i=1}^{M+M_{\text{new}}} w_{klk}^i \mathcal{N}(\mathbf{x}_k; \mathbf{m}_{klk}^i, \mathbf{P}_{klk}^i) \end{aligned} \quad (6.30)$$

式中: M_{new} 表示在 k 时刻的初始化新生目标; $w_{klk}^j, \mathbf{m}_{klk}^j, \mathbf{P}_{klk}^j$ 表示第 j 个新生目标的初始化存在概率、均值和协方差。

航迹的终止以及新生目标的添加不会对概率密度函数引入任何问题,因为修正的概率密度式(6.30)在整个观测空间上的积分仍然是观测空间内目标数目。式(6.30)成为 $k+1$ 时刻的输入密度,那么就完成了由 GMPHD 推导 JIPDA 的证明。

6.5 性能界限

在标准单目标跟踪算法或者多目标跟踪算法中, RMS 误差为这些算法的性能评价指标,但是 RMS 只是目标状态误差的评价函数,它不适用于多目标跟踪算法。因为它不包含目标数目估计误差。在多目标跟踪算法中,目标数目是一个随机变量。因此,每一个多目标跟踪算法在估计目标状态的同时,还要惩罚错误奖励正确的估计目标数目。在多目标跟踪背景下, Hoffman 和 Mahler (2002^[70]) 提出的“Wassertein 距离”可以作为跟踪算法性能的测度函数。Wassertein 距离介绍如下:

任何滤波器的性能评估是计算真值和滤波器估计值之间的“距离”。在随机集理论框架下,它是两个随机集 X 和 Y 之间的距离,其中 $X = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}, Y = \{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m\}$ 。

令 $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 表示两个元素 \mathbf{x}, \mathbf{y} 之间在欧几里得 N 维空间的距离。对于任何有限子集,经验距离由以下构成:

$$\begin{aligned} \delta_X(\mathbf{x}) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{x_i}(\mathbf{x}) \\ \delta_Y(\mathbf{y}) &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \delta_{y_i}(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

X 和 Y 之间的 Wassertein 距离定义如下:

$$d_p^W(X, Y) = \inf_C \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m C_{i,j} d(x_i, y_j)^p}$$

$$d_\infty^W(X, Y) = \inf_C \max_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} \sqrt[p]{\tilde{C}_{i,j} d(x_i, y_j)^p}$$

其中:

- (1) 最大下界为遍历所有 $n \times m$ 转移矩阵 $C = C_{i,j}$ 时的下界。
- (2) $\tilde{C}_{i,j} = \begin{cases} 1, & C_{i,j} \neq 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$
- (3) C 为 $n \times m$ 转置矩阵, 若对于任意的 $i = 1, \dots, n$ 和 $j = 1, \dots, m$, 有 $C_{i,j} \geq 0$ 且满足

$$\sum_{i=1}^n C_{i,j} = \frac{1}{m}, \quad \sum_{j=1}^m C_{i,j} = \frac{1}{n} \quad \left(\text{即} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m C_{i,j} = 1 \right)$$

一般情况下 $p \geq 2$ 。这个距离可以解释如下: 假定只有一个真值, $G = \{g\}$, 然而跟踪器输出结果为 $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ 。假定所有输出中 $\{x_1, \dots, x_{n-1}\}$ 与真值接近, 但是 $\{x_n\}$ 是个奇异值。在距离方程中令 $p = 1$ 将会一直忽略奇异目标。但是, 令 $p \geq 2$ 时, 将会使奇异目标的权值越来越大。因此, 会更加惩罚因错误估计目标数目的滤波器, 这就是多目标跟踪性能评估的目的。因此, Wassertein 距离对于性能评估是合适的, 并应用于很多文献当中 (Mahler, 2003^[102]; Panta 等, 2005^[135]; Vo 等, 2005^[158], 2006^[159])。

6.6 演示实例

以仿真为例, 考虑一个 500×500 的二维监视区域。每一个目标状态包含目标位置, 速度即 $x_k = [x_k, \dot{x}_k, y_k, \dot{y}_k]^T$ 。目标幸存概率为 $p_{S,k} = 0.98$ 。每个目标的运动模型为线性动态模型:

$$x_k = F_{k-1} x_{k-1} + v_{k-1}$$

其中

$$F_{k-1} = \begin{bmatrix} 1 & T & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

式中: v_{k-1} 是均值为零、方差为 Q_{k-1} 的高斯分布过程噪声, 即

$$Q_{k-1} = q^2 \begin{bmatrix} T^3/3 & T^2/2 & 0 & 0 \\ T^2/2 & T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T^3/3 & T^2/2 \\ 0 & 0 & T^2/2 & T \end{bmatrix}$$

式中: T 是采样周期, 且假定为 1s 。过程噪声标准偏差为 $q = 2$ 。新生目标的强度函数为高斯混和分布, 有

$$\gamma_k(\mathbf{x}_k) = 0.25N(\mathbf{x}_k; \mathbf{m}_\gamma^1, P_\gamma) + 0.25N(\mathbf{x}_k; \mathbf{m}_\gamma^2, P_\gamma)$$

式中: $\mathbf{m}_\gamma^1 = [100, 10, 30, -10]^T$; $\mathbf{m}_\gamma^2 = [400, -10, 30, -10]^T$; $P_\gamma = \text{diag}([25, 0, 25, 0])$ 。传感器在每个扫描周期内观测目标位置, 观测模型可以表示为

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k$$

式中

$$\mathbf{H}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

且 \mathbf{w}_k 是均值为零、方差为 \mathbf{R} 的高斯分布观测噪声, 有

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

每个目标的检测概率 $p_{D,k} = 0.9$ 。虚警(或杂波)符合泊松随机集, 强度函数的杂波密度假定为 $\lambda_k = 2 \times 10^{-4}$, 或者在监视区域内每个扫描周期接收大约 50 个杂波。仿真运行 30 个扫描周期。

图 6.2 给出了整个观测时间内的所有航迹和观测。

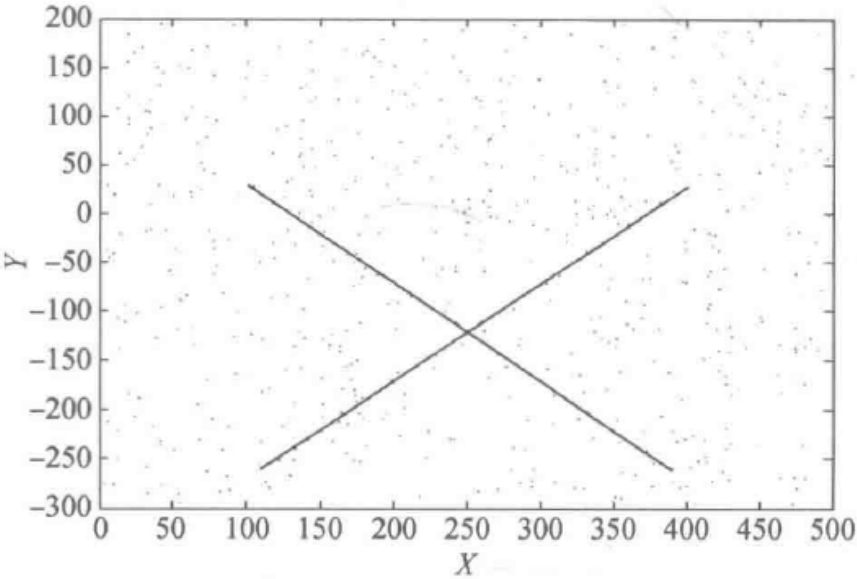


图 6.2 单次仿真实验中目标轨迹(实线)和观测(点)

图 6.3 给出了一个仿真周期的跟踪结果。

仿真结果表明, 当目标航迹很好区分时, 目标数目的概率分布和目标状态收敛于真实概率分布函数, 如图 6.3 中下行曲线所示。但是, 当目标间距很近且交叉时, 由于关联误差或估计误差, 导致估计概率分布不收敛于真实分布。

为了评估跟踪滤波器, 进行 200 次蒙特卡罗实验, 并对 Wasserstein 距离时间平均。性能曲线如图 6.4 所示。

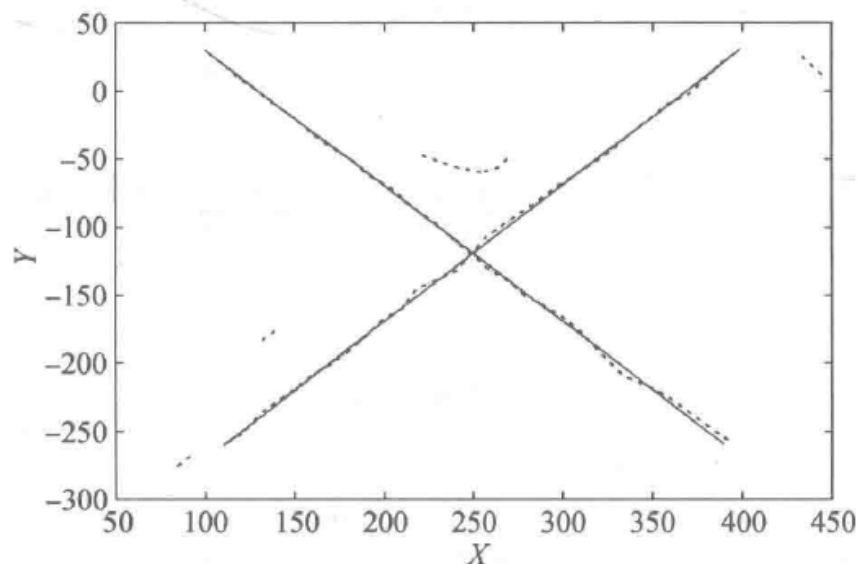


图 6.3 GM - PHD 跟踪结果

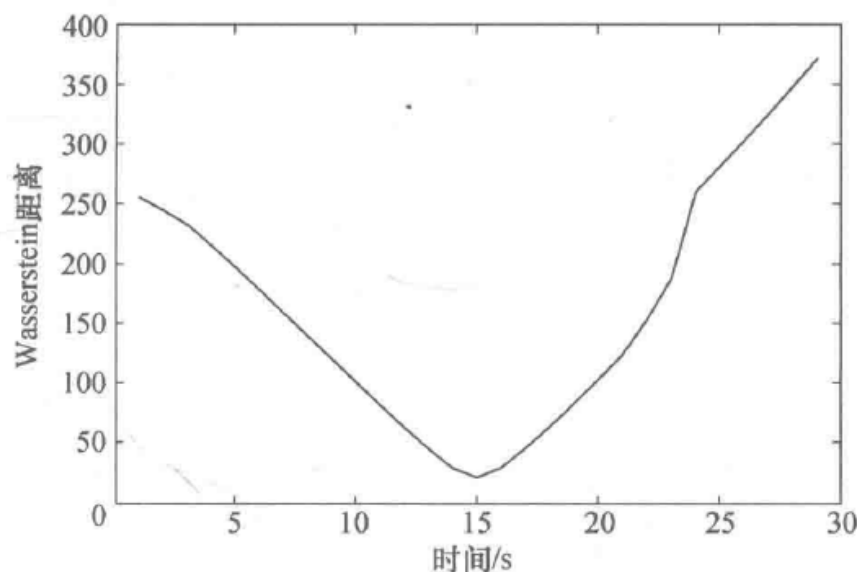


图 6.4 GM - PHD 跟踪性能

6.7 小 结

本章介绍了多目标跟踪的一般模型。随机集理论模型解决了多目标跟踪背景下任何滤波算法都会遇到的重要问题:估计每个目标的状态并估计监视区域内目标的数目。目标状态建模为随机有限集的元素,这个随机有限集的元素数目是一个随机变量。当建立模型之后,贝叶斯迭代应用于估计问题。本章讨论了随机有限集的最优贝叶斯迭代。在单目标跟踪背景下,最优贝叶斯迭代可以简化为 IPDA 滤波(基于目标存在不确定性)。此外,也讨论了很多实用的随机有限集近似算法,例如 PHD 和 CPHD,因为当目标数目较多时,最优贝叶斯滤波将会产生严重的组合问题。

第 7 章 目标跟踪的贝叶斯平滑算法

用特定时间以后收集到的测量数据对某一特定时间内目标状态的估计通常称为平滑或回溯。得益于使用了更多观测量(或信息量),平滑较滤波而言能够获得更好的估计,这以一定的时间延迟为代价。然而,这些改进在“态势感知”或“威胁评估”方面的应用非常有效。如果能向操作者提供一幅更加准确的实际战场环境图像,则对于提高操作员的效率具有重要的意义,即便是存在一定的时延。对于这些应用,除了目标状态之外,描绘整个场景的参数,如目标的数量、起始/终止的时间和位置,这些很可能都是非常有用的新息。平滑算法能够带来对整个态势图像的更好估计,因此也提高了关键应用的有效性,如态势或威胁估计。本章将主要介绍平滑的贝叶斯方程,并推导在不同跟踪场景下贝叶斯算法的建立:非机动目标、机动目标、杂波以及目标存在不确定等情况。

7.1 平滑简介

前几章介绍了滤波器,基于直到某一特定时刻的观测,给出了该时刻目标状态的“最优估计”。另一方面,平滑则基于超过特定时刻的数据对该时刻目标状态进行估计(预测是另一种估计,它利用直到某一时刻之前某一点的观测对该时刻状态进行估计)。这三种类型估计器的操作示意如图 7.1 所示。

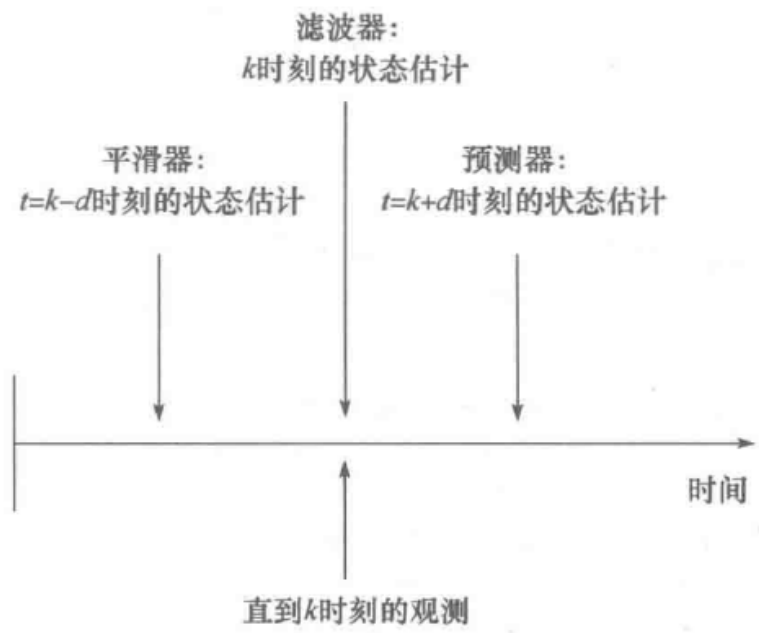


图 7.1 估计:滤波,平滑,预测

基于如何利用接收的数据去估计一个过去时刻的状态,平滑器有三种类型:

(1) 固定延迟平滑:通过一个固定延时量来估计过去状态(图 7.2)。

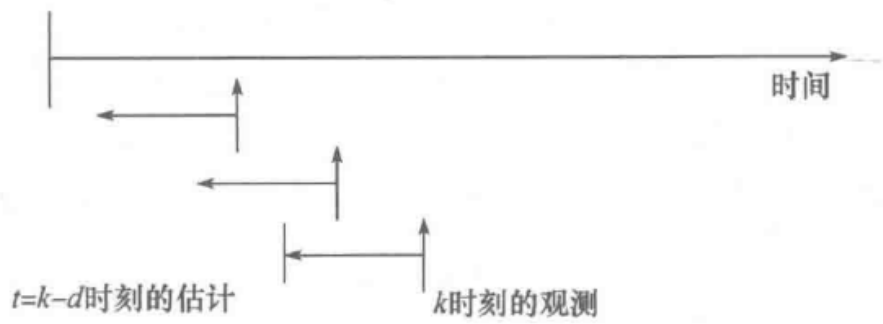


图 7.2 固定延迟平滑

(2) 固定区间平滑:从 $t = k - N$ 时刻到 $t = k$ 时间间隔内的观测估计相同区间 (从 $t = k - N$ 到 $t = k$) 的状态。连续平滑通过滑动窗口来实现,期间保持区间间隔 N 固定(图 7.3)。

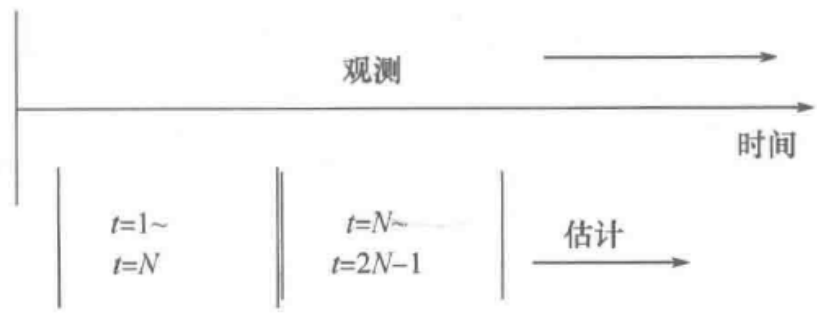


图 7.3 固定区间平滑

(3) 固定点平滑:估计过去某一特定点的状态。这通常用来改善系统的初始条件(图 7.4)。

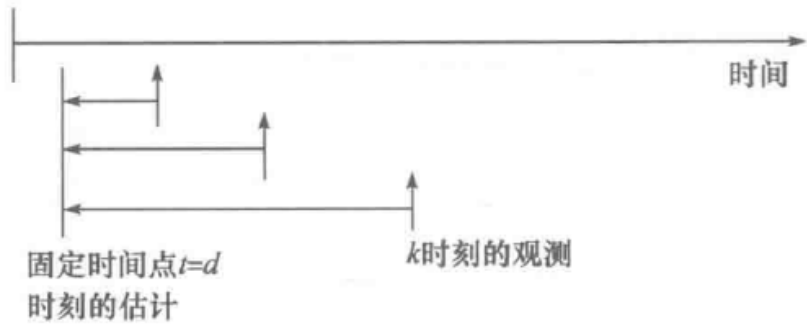


图 7.4 固定点平滑

在 7.2 节中,将介绍最优贝叶斯平滑递推。

7.2 最优贝叶斯平滑

$t = k - N$ 时刻的状态,可以通过使用直到该时刻之后某一点收到的观测获得。在贝叶斯理论中,如果记 $t = k - N$ 时刻的状态为 X_{k-N} ,而直到时间 $t = k$ 的观察集表示为 $y^k = \{y_k, y_{k-1}, \dots, y_0\}$,则目标状态的估计可由以下公式给出:

$$p(s_k | y^k) = \frac{p(y_k | s_k)}{p(y_k | y^{k-1})} p(s_k | y^{k-1}) \quad (7.1)$$

将式(7.1)中的 s_k 建模为 $t = k - N \sim t = k$ 时刻过去状态的增广状态,为设计平滑算法提供了基础框架。这种状态向量增广的方法是一种设计贝叶斯平滑递推算法的简单方法。下面首先讨论增广状态以及观测模型。这种状态增广的方法经常受到会增加计算复杂性的批评,然而,随着计算速度的突飞猛进,这种批评不再具有什么实质性的意义。这种状态增广建模方法使得平滑递推可以使用与标准贝叶斯滤波器一样的密度函数(2.1节)。

7.2.1 平滑的增广模型

使用第1章介绍的形式体系,在增广状态方法中,目标运动状态重新定义为

$$S_k = [s_k^T \ s_{k-1}^T \ \cdots \ s_{k-N}^T]^T \quad (7.2)$$

式中; $s_{(\cdot)}$ 是特定时刻的状态向量;而 S_k 是过去状态向量的增广向量。

由于对目标状态进行了重新定义,因此目标运动模型和传感器观测模型都要进行相应的调整:

$$S_k = g(S_{k-1}, k) \quad (7.3)$$

$$y_k = l(S_k, w_k) \quad (7.4)$$

因此,对于增广状态模型,式(7.1)中的贝叶斯方程变为

$$p(S_k | y^k) = \frac{p(y_k | S_k)}{p(y_k | y^{k-1})} \times p(S_k | y^{k-1}) \quad (7.5)$$

$$= \frac{p(y_k | S_k)}{p(y_k | y^{k-1})} \times \int_{S_{k-1}} p(S_k | S_{k-1}) p(S_k | y^{k-1}) \quad (7.6)$$

从式(7.6)中可以明显看出后验状态密度 $p(S_k | y^k)$ 是从前验密度 $p(S_k | y^{k-1})$ 递推地实现的,此即为建立贝叶斯平滑算法的基本模块。此递推过程与标准滤波方程类似。

通过引入增广状态向量,使得应用同样的贝叶斯框架(见第6章)找出后验状态密度成为可能。但在过程中,状态量 $s_k, s_{k-1}, \dots, s_{k-N}$ 同时被 $t = k$ 时刻的测量更新。因此,在同一个框架下,可获得状态 s_k 的滤波输出,而其余状态分量 $s_{k-1}, s_{k-2}, \dots, s_{k-N}$ 则被平滑。为了叙述方便,假设目标运动模型和观测模型均为线性,以推导卡尔曼平滑器、PDA平滑器、IMM平滑器以及IPDA平滑器。

7.3 增广状态卡尔曼平滑

7.3.1 目标运动模型

假设目标在一维空间内以相对恒定的速度运动,如果用 x_k 表示在一维坐标的位置,用 \dot{x}_k 表示在时间 $t = k$ 时的速度,那么复合目标状态就是 $x_k = [x_k \ \dot{x}_k]^T$ 。目标动态方程为

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{F}_k \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{v}_k$$

其中

$$\mathbf{F}_k = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

式中: T 为采样间隔; \mathbf{v}_k 为加性过程噪声对应匀速运动约束的微量偏离。过程噪声是零均值高斯白噪声, 其方差为 \mathbf{Q}_k 。对于平滑, 状态向量增广为 $\mathbf{X}_k = [\mathbf{x}_k^T \quad \mathbf{x}_{k-1}^T \quad \cdots \quad \mathbf{x}_{k-N}^T]^T$ 。过去状态的转移方程为

$$\mathbf{X}_{k-m} = \mathbf{I} \mathbf{X}_{k-m}$$

式中: \mathbf{I} 是具有适当维数的单位矩阵; 过去状态保持不变。

增广状态动态模型为

$$\mathbf{X}_k = \mathbf{F}_k \mathbf{X}_{k-1} + \mathbf{V}_k \quad (7.7)$$

其中:

(1) \mathbf{F}_k 是状态转移矩阵:

$$\mathbf{F}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_k & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{I} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \mathbf{I} & 0 \end{bmatrix}$$

(2) \mathbf{V}_k 为过程噪声向量:

$$\mathbf{V}_k = [\mathbf{v}_k \quad 0 \quad \cdots \quad 0]^T$$

(3) \mathbf{Q}_k 为过程噪声协方差矩阵:

$$\mathbf{Q}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.8)$$

7.3.2 传感器观测模型

假设在任意特定时刻 $t = k$, 传感器产生的是关于目标当前位置的观测, 这时传感器的观测方程为

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k$$

式中: $\mathbf{H}_k = [1 \quad 0]$, \mathbf{w}_k 是均值为零、方差为 \mathbf{R}_k 的高斯白噪声。由于平滑中状态向量被增广, 因此平滑器的传感器方程为

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{X}_k + \mathbf{W}_k \quad (7.9)$$

其中:

(1) $\mathbf{H}_k = [\mathbf{H} \quad 0 \quad \cdots \quad 0]$ 。

需要注意的是,虽然进行了上式的定义 H_k ,观测向量仍保持不变,即 $Y_k = y_k$ 。

(2) $W_k = w_k$ 为观测噪声向量,它服从均值为零、方差为 $R_k = R_k$ 的正态分布(因为观测向量没有变化)。

7.3.3 状态估计

状态 X_k 的最优 MMSE 估计为后验概率密度 $p(X_k | y^k)$ 的条件均值。式(7.6)给出了 $p(X_k | y^k)$ 的递推方程,为叙述清晰重写为

$$p(X_k | y^k) = \frac{p(y_k | X_k)}{p(Y_k | Y^{k-1})} \times \int_{X_{k-1}} p(X_k | X_{k-1}) p(X_{k-1} | y^{k-1}) \quad (7.10)$$

式中: $p(Y_k | Y^{k-1})$ 为归一化因子; $p(y_k | X_k)$ 为似然函数; $p(X_k | y^{k-1}) = \int_{X_{k-1}} p(X_k | X_{k-1}) p(X_{k-1} | y^{k-1})$ 为预测密度。

上面的递推公式以及各种密度的定义与 2.2 节标准卡尔曼滤波中的定义完全一样。线性高斯假设对平滑器成立,因此,定理 2.1 仍然适用,而归一化因子、似然函数以及预测密度的推导也同样适用。于是,可以得到与 2.2 节一样的结论,只需将状态向量和相应矩阵替代为式(7.7)和式(7.9)中的增广模型。最终解法是标准卡尔曼滤波器的一个副本,称其为增广状态卡尔曼平滑器。

7.3.4 增广状态卡尔曼平滑方程

从 $t = k - 1$ 时刻关于状态估计 $\hat{X}_{k|k-1}$ 及相应误差协方差 $P_{k-1|k-1}$ 的先验知识,增广状态卡尔曼平滑器(AS-KS)将通过下面的步骤计算目标状态估计 $\hat{X}_{k|k}$:

$$\begin{aligned} [\hat{X}_{k|k-1}, P_{k|k-1}] &= KF_P[\hat{X}_{k|k-1}, P_{k-1|k-1}, F_k, Q_k] \\ [\hat{X}_{k|k}, P_{k|k}] &= KF_E[y, \hat{X}_{k|k-1}, P_{k|k-1}, H_k, R_k] \end{aligned}$$

7.4 机动目标跟踪平滑

第 3 章中详细讨论了机动目标跟踪的问题,交互式多模型(IMM)算法被认为是机动目标跟踪场景中最有效的算法。基于 IMM 的机动目标平滑构想由 Helmick 等(1993^[62], 1995^[63], 1996^[64])实现。Challa 等(2002a^[42], 2002b^[43])利用贝叶斯平滑的增广模型将 IMM 算法拓展至平滑问题,其算法称为“增广状态 IMM”(AS-IMM)算法。AS-IMM 算法的优势在于只需用过去状态进行状态增广(式(7.2))即可沿用标准 IMM 算法的计算步骤(3.4 节)。

7.4.1 基于 AS-IMM 的最优贝叶斯估计

对于机动目标跟踪的多模型方法,目标运动模型式(7.7)调整为

$$X_k = F_k^j X_{k-1} + U_k^j V^j(k) \quad (7.11)$$

系统随时会在任意两个模型 $r_k = i$ 和 $r_k = j$ 之间切换,模型转换遵循马尔可夫链,转移概率为已知,即

$$\pi_{ij} = p(r_k = j | r_k = i)$$

其中, $i, j = 1, 2, \dots, d$ 。

传感器模型也需进行调整以适应不同模型,即

$$y_k = H^j X_k + W_k \quad (7.12)$$

于是,实现从观测集获得增广状态后验密度的基本贝叶斯方程为

$$p(X_k | y^k) = \sum_{j=1}^d p(X_k | M_k^j, y^k) p(M_k^j | y^k) \quad (7.13)$$

式中

$$M_k^j = [M_k^{0,j} \quad M_k^{1,j} \quad \dots \quad M_k^{N,j}]^T \quad (7.14)$$

$M_k^{i,j}$ 意味着在 k 时刻模型 M^j 对增广系统的第 i 个延迟有效,其中 $i = 0, 1, 2, \dots, N$ 。

式(7.13)中后验概率密度的计算与式(3.45)一样,主要的问题在于如何计算增广状态所有延迟的模型概率,下面将讨论这一问题。

7.4.2 AS-IMM 的模型概率

假如不同时刻的观测之间相互独立,那么利用当前观测 y_k 对 k 时刻的模型概率 $M_k^{i,j}$ 进行更新的方程为

$$p(M_k^{i,j} | y^k) = \frac{1}{\delta} p(y_k | M_k^{i,j}, y^{k-1}) p(M_k^{i,j} | y^{k-1}) \quad (7.15)$$

式中: $\delta = \sum_{j=1}^d p(M_k^{i,j} | y^k)$ 为归一化因子,可在式(7.15)右边各模型 $M_k^{i,j}$, $j = 1, \dots, d$ 的概率计算完成之后获得。式(7.15)分子中的每一项推导如下:

(1) $p(y_k | M_k^{i,j}, y^{k-1})$ ——基于模型的第 i 个延迟的观测似然函数:

$$\begin{aligned} p(y_k | M_k^{i,j}, y^{k-1}) &= \sum_{h=1}^d p(y_k | M_k^{i+1,h}, M_k^{i,j}, y^{k-1}) p(M_k^{i+1,h} | M_k^{i,j}) \times \\ &\quad \sum_{l=1}^d p(M_k^{i,j} | M_k^{i-1,l}) \\ &= \sum_{h=1}^d \dots \sum_{s=1}^d \sum_{w=1}^d p(y_k | M_k^{0,w}, M_k^{1,s}, \dots, M_k^{i+1,h}, M_k^{i,j}, y^{k-1}) \times \\ &\quad p(M_k^{0,w} | M_k^{1,s}), \dots, p(M_k^{i+1,h} | M_k^{i,j}) \times \sum_{l=1}^d p(M_k^{i,j} | M_k^{i-1,l}) \\ &= \frac{1}{\delta} \sum_{h=1}^d \dots \sum_{s=1}^d \sum_{w=1}^d N(y_k; \hat{y}_{k|k-1}^w, S_k^w) \pi_{sw} \dots \pi_{jh} \sum_{l=1}^d \pi_{lj} \end{aligned} \quad (7.16)$$

这里,下面的关系式可根据增广状态滤波的结构确定:

$$p(y_k | M_k^{0,w}, M_k^{1,s}, \dots, M_k^{i+1,h}, M_k^{i,j}, y^{k-1}) = p(y_k | M_k^{0,w}, y^{k-1})$$

$$= \mathcal{N}(y_k; \hat{y}_{k|k-1}^w, S_k^w)$$

$$p(M_k^{i+1,h} | M_k^{i,j}) = p(M_{k-i+1}^{0,h} | M_{k-i}^{0,j}) = \pi_{jh}$$

$$p(M_k^{i-1,l} | y^{k-1}) = p(M_{k-1}^{i,l} | y^{k-1}) = \mu_l^i(k-1)$$

(2) $p(M_k^{i,j} | y^{k-1})$ ——第 i 个延迟的预测模型概率,可由标准的 IMM 算法计算。

将以上计算结果代入式 (7.15) 即可计算得到概率 $p(M_k^{i,j} | y^k)$, 进而得到式 (7.13) 中的概率 $p(M_k^j | y^k)$ 。

7.4.3 AS-IMM 状态估计

式 (7.13) 中基于模型的状态密度 $p(X_k | M_k^j, y^k)$ 更新与标准 IMM 算法 (式 (3.45)) 一样。因此,一旦模型概率 $p(M_k^j | y^k)$ 由式 (7.15) 计算得到,状态密度 $p(X_k | y^k)$ 的更新即可遵循 IMM 滤波算法相同的步骤完成。

7.4.4 AS-IMM 方程

算法 41 k 时刻 AS-IMM 滤波递归方程

(1) **for** 每个模型 j **do**

① 模型概率向量预测:

$$\mu_j(k | k-1) = p(M_k^j | y^{k-1}) = \sum_{i=1}^d \pi_{ij} \mu_i(k-1)$$

② 概率混合:

$$\mu_{i|j}(k-1 | k-1) = p(M_{k-1}^i | M_k^j, y^{k-1})$$

$$= [\mu_{i|j}^0(k-1 | k-1) \quad \mu_{i|j}^1(k-1 | k-1) \quad \dots \quad \mu_{i|j}^N(k-1 | k-1)]^T$$

其中

$$\mu_{i|j}^h(k-1 | k-1) = \frac{\pi_{ij} \mu_i^h(k-1)}{\mu_j^h(k | k-1)}, \quad h = 0, 1, \dots, N$$

③ 估计混合:

$$\hat{X}_{k-1|k-1}^{0j} = \sum_{i=1}^d \text{diag}\{\mu_{i|j}(k-1 | k-1)\} \hat{X}_{k-1|k-1}^i$$

④ 协方差混合:

$$P_{k-1|k-1}^{0j} = \sum_{i=1}^d \{P_{k-1|k-1}^i + [X_{k-1} - \hat{X}_{k-1|k-1}^{0j}] \times$$

$$[X_{k-1} - \hat{X}_{k-1|k-1}^{0j}]' \text{diag}\{\mu_{i|j}(k-1 | k-1)\}$$

其中

$$\text{diag}\{\mu_{ij}(k-1|k-1)\} = [\mu_{i1j}^0(k-1|k-1)I_n, \dots, \mu_{idj}^d(k-1|k-1)I_n]$$

I_n 是与单个状态 \mathbf{x} 同维的单位矩阵。

(2) **end for**

(3) **for** 每个模型 j **do** (基于模型的滤波)

① 状态预测: $\hat{\mathbf{X}}_{k|k-1}^j = \mathbf{F}^j \hat{\mathbf{X}}_{k-1|k-1}^{0j} + \mathbf{U}_k$

② 协方差预测: $\mathbf{P}_{k|k-1}^j = \mathbf{F}^j \mathbf{P}_{k-1|k-1}^{0j} \mathbf{F}^{j'} + \mathbf{Q}^j$

③ 状态更新: $\hat{\mathbf{X}}_{k|k}^j = \hat{\mathbf{X}}_{k|k-1}^j + \mathbf{P}_{k|k-1}^j \mathbf{H}^{jT} (\mathbf{H}^j \mathbf{P}_{k|k-1}^j \mathbf{H}^{jT} + \mathbf{R}_k)^{-1} (\mathbf{y}_k^j - \mathbf{H}^j \hat{\mathbf{X}}_{k|k-1}^j)$

④ 协方差更新: $\mathbf{P}_{k|k}^j = \mathbf{P}_{k|k-1}^j - \mathbf{P}_{k|k-1}^j \mathbf{H}^{jT} (\mathbf{H}^j \mathbf{P}_{k|k-1}^j \mathbf{H}^{jT} + \mathbf{R}_k)^{-1} \mathbf{H}^j \mathbf{P}_{k|k-1}^j$

(4) **end for**

(5) 模型概率更新:

① 基于模型 M_k^j 观测 y_k 的似然函数:

$$\Lambda_j^i(k) = \sum_{h=1}^d \cdots \sum_{\omega=1}^d \sum_{s=1}^d N(\mathbf{y}_k; \mathbf{H}^\omega \hat{\mathbf{X}}_{k|k-1}^\omega, \mathbf{H}^\omega \mathbf{P}_{k|k-1}^\omega \mathbf{H}^{\omega T} + \mathbf{R}_k) \pi_{s\omega} \cdots \pi_{jh}$$

② 模型 $M_j(k)$ 概率更新:

$$\boldsymbol{\mu}_j(k|k) = \begin{bmatrix} \mu_j^0(k) \\ \mu_j^1(k) \\ \vdots \\ \mu_j^N(k) \end{bmatrix}$$

其中

$$\mu_j^i(k) = \frac{\mu_j^i(k|k-1) \Lambda_j^i(k)}{\sum_{l=1}^N \mu_l^i(k|k-1) \Lambda_l^i(k)}$$

(6) 输出混合:

$$\hat{\mathbf{X}}_{k|k} = \sum_{j=1}^d \text{diag}\{\boldsymbol{\mu}_j(k|k)\} \hat{\mathbf{X}}_{k|k}^j$$

$$\mathbf{P}_{k|k} = \sum_{j=1}^d \{ \mathbf{P}_{k|k}^j + [\hat{\mathbf{X}}_{k|k} - \hat{\mathbf{X}}_{k|k}^j] [\hat{\mathbf{X}}_{k|k} - \hat{\mathbf{X}}_{k|k}^j]' \} \text{diag}\{\boldsymbol{\mu}_j(k|k)\}$$

其中

$$\text{diag}\{\boldsymbol{\mu}_j(k|k)\} = \text{diag}[\mu_j^0(k)I_n, \mu_j^1(k)I_n, \dots, \mu_j^d(k)I_n]$$

7.5 杂波环境下的目标跟踪平滑

PDA(4.3节)是杂波环境下目标跟踪中最为流行和有效的算法。最早将 PDA

拓展至平滑的尝试之一是 Mahalanabis 等 (1990^[98]), 但是后来, Challa 等 (2002a, b^[42,43]) 建立了基于目标增广状态模型的杂波环境目标跟踪平滑算法。该算法同标准 PDA 算法具有相同的计算步骤, 因而称为增广状态概率数据关联 (AS - PDA) 算法。

7.5.1 增广状态 PDA 平滑的贝叶斯模型

在杂波环境下, 传感器的观测不仅来自目标, 还有可能来自杂波, 而且, 传感器有可能出现漏警。这两项约束可以描述为:

(1) 传感器收集的观测由下式给出:

$$\mathbf{y}_k = \{\mathbf{y}_k(1), \mathbf{y}_k(2), \dots, \mathbf{y}_k(n)\}$$

式中: n 为 $t=k$ 时刻收到的有效观测的个数。

(2) 传感器以某一特定的检测概率 $0 < P_D \leq 1$ 对目标进行检测。

目标运动及传感器模型同式 (7.7) 和式 (7.9) 中给出的一样。

7.5.2 AS - PDAS 的跟踪波门

观测预选过程从获得上一个时刻的状态估计 $\mathbf{X}_{k-1|k-1}$ 和协方差矩阵 $\mathbf{P}_{k-1|k-1}$ 开始, 然后执行标准的卡尔曼滤波 (KF) 预测步骤推出预测状态和观测的密度, 基于预测观测 $\hat{\mathbf{y}}_k$ 和相应的协方差 \mathbf{S}_k , 对每个接收到的观测进行如下检验:

$$[\mathbf{y}_k(n) - \hat{\mathbf{y}}_k]^T \mathbf{S}_k^{-1} [\mathbf{y}_k(n) - \hat{\mathbf{y}}_k] < \gamma \quad (7.17)$$

式中: n 为第 n 个观测。

这里选定合适的卡方检验门限 γ , 以保证源自目标的观测以要求的特定概率落入预选波门区域, 这一概率称为“波门概率”, 记为 P_G 。满足以上测试的区域称为“确认区域”或“波门”。基于高斯假设, 理论上这一椭圆体区域的体积为

$$V_k = c_{n_z} |\gamma| |\mathbf{S}_k|^{1/2} \quad (7.18)$$

式中: n_z 为观测的维数; c_{n_z} 为 n_z 维单位超球体 ($c_1 = 1, c_2 = \pi, c_3 = 4\pi/3$, 等等) 的体积。满足上式检验或者说落入波门区域的观测称为“确认”观测, 被用来更新目标状态。经波门确认, 在 m 个观测中选择了 m_k 个确认观测。

这 m_k 个观测构成的子集即用来进行贝叶斯递推, 实现杂波环境下的 PDA 滤波。

杂波环境目标跟踪增广状态方法的贝叶斯公式由下式给出:

$$\begin{aligned} p(\mathbf{X}_k | \mathbf{y}^k, m^k) &= p(\mathbf{X}_k | \mathbf{y}_k, m_k, \mathbf{y}^{k-1}, m^{k-1}) \\ &= p(\mathbf{X}_k | \mathbf{y}_k(1), \mathbf{y}_k(2), \dots, \mathbf{y}_k(m_k), m_k, \mathbf{y}^{k-1}, m^{k-1}) \end{aligned} \quad (7.19)$$

式中: $\mathbf{y}_k(n)$ 为 $t=n$ 时刻的第 n 个确认观测; \mathbf{y}^k 为直到 $t=k$ 时刻所有的确认观测集合; m_k 为 $t=k$ 时刻确认观测的个数; m^k 为直到 $t=k$ 时刻所有的确认观测的总数。

式(7.19)中杂波环境平滑的贝叶斯定义与标准 PDAF(式(4.2))中的定义相同,除了标准状态向量须由增广状态向量代替之外,其推导也和标准 PDAF 的推导过程一致。推导结果是一种对当前状态滤波同时对过去状态进行平滑的杂波环境下的跟踪算法。

7.5.3 增广状态 PDA 平滑方程

从上一个时刻 $t = k - 1$ 的状态估计 $\hat{X}_{k-1|k-1}$ 和协方差矩阵 $P_{k-1|k-1}$ 开始,增广状态方法以类似于标准 PDA 滤波器的迭代方式,更新目标的状态。算法 42 给出了 AS - PDA 平滑的一次迭代过程。

算法 42 k 时刻 AS - PDA 滤波递推方程

(1) 预测:

$$[\hat{X}_{k|k-1}, P_{k|k-1}] = KF_P[\hat{X}_{k-1|k-1}, P_{k-1|k-1}, F_k, Q_k]$$

(2) 观测选择:

$$[y_k, V_k] = MS_1[y_k, \hat{X}_{k|k-1}, P_{k|k-1}, H_k, R_k]$$

(3) 所有确认观测 i 的似然函数:

$$[\{p_k(i)\}_i] = ML_1[\{y_k(i)\}_i, \hat{X}_{k|k-1}, P_{k|k-1}, H_k, R_k]$$

(4) **if** 非参数跟踪 **then**

(5) 计算 V_k :

$$V_k = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2 + 1)} \sqrt{|S(k)| \gamma^{1/2}}$$

式中: $|S(k)|$ 为 $S(k)$ 的行列式。

(6) 杂波观测密度估计:

$$\rho = m_k/V_k$$

(7) **end if**

(8) 单目标数据关联(无目标存在性):

$$[\{\beta_k(i)\}_{i=0}^{m_k}] = STDA[\{p_k(i)\}_{i=1}^{m_k}]$$

(9) 估计/合并:

$$[\hat{X}_{k|k}, P_{k|k}] = PDA_E[\hat{X}_{k|k-1}, P_{k|k-1}, \{y_k(i)\}_{i=1}^{m_k}, \{\beta_k(i)\}_{i=0}^{m_k}, H_k, R_k]$$

(10) 估计输出:航迹状态均值 $\hat{X}_{k|k}$ 和协方差 $P_{k|k}$ 。

7.6 目标存在性不确定的平滑

IPDA 及其衍生算法(5.7.3 节和 5.8.3 节)是最为有效的目标存在性不确定的目标跟踪算法。而且,它与随机集方法的理论联系(6.4.4 节及附录)使得该算法可拓展到多目标跟踪及其他更为复杂的应用。Chakravorty 和 Challa (2004, 2005, 2006^[35,36,37])提出了 IPDA 算法的平滑版本。

IPDA 平滑沿用增广状态模型的目标运动模型和传感器观测模型。对于线性系统,结果模型如式(7.7)和式(7.9)所示。传感器会收到杂波观测且以某一检测概率对目标进行检测。这些假设在 AS-PDA 平滑算法中同样适用(7.5.1 节)。IPDA 滤波器将目标的存在建模为马尔可夫链(马尔可夫链 1 模型),包含两个可选事件案——“存在”($E_k = 1$)和“不存在”($E_k = 0$) (为清晰起见,这里只讨论马尔可夫链 1,接下来的讨论很容易拓展至马尔可夫链 2)。在每个扫描时间,目标可能以某概率在这两个事件之间切换,切换概率矩阵为

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma_{00} & \Gamma_{01} \\ \Gamma_{10} & \Gamma_{11} \end{bmatrix}$$

其中, $\Gamma_{ij} = p(E_k = j | E_k = i), i, j \in \{1, 0\}$ 。

然而,平滑跨越了 N 个时间间隔,且每个目标可能有多个可选的存在性历史。因此,增广状态 IPDA 的核心部分是如何建立增广目标存在性的模型并递推地更新增广存在性的概率。状态增广和递推可以与标准的 IPDA 滤波相同的方式实现。

7.6.1 目标存在性增广递推

N 步目标存在事件 $E_k = 1$ 和不存在事件 $E_k = 0$ 对目标存在性事件进行增广:

$$\mathbf{E}_k = [E_k = i, E_{k-1} = j, \dots, E_{k-N} = l]^T$$

其中, $i, j \in \{1, 0\}$ 。于是, \mathbf{E}_k 可由 i, j, \dots, l 的所有组合实现取值 0 或 1。然而,在 IPDA 算法中,一个存在的目标可能会停止存在,而一旦目标不存在,则不会再回到存在的状态。这在转移概率矩阵 Γ 中体现, $\Gamma_{01} = 1$ 而 $\Gamma_{00} = 1$ 。这些条件对增广目标存在性有一些影响,举例来说,考察下面一个增广存在性:

$$\dots, E_{k-a} = 1, \dots, E_{k-b} = 0, \dots$$

这里,如果 $k-a > k-b$,该增广存在性的概率将为 0。如此,对于增广目标存在行,将有 $N+2$ 个允许的组合,它们是:

(1) 目标自 $t = k-N$ 到 $t = k-m$ 存在而非自 $t = k-m+1$ 到 $t = k$:

$$\mathbf{E}_k^m = [E_k = 0, \dots, E_{k-m+1} = 0, E_{k-m} = 1, \dots, E_{k-N} = 1]^T \quad (7.20)$$

其中, $m = 0, 1, 2, \dots, N$ 。

(2) 目标在 $t = k-N$ 到 $t = k$ 的区间内均不存在:

$$\mathbf{E}_k^{N+1} = [E_k = 0, \dots, E_{k-N} = 0]^T$$

增广状态 IPDA 平滑器对 $p(\mathbf{E}_k^m | \mathbf{y}^{k-1})$ 进行更新以获得概率 $p(\mathbf{E}_k^m | \mathbf{y}^k)$, 这通过贝叶斯递推方程实现, 即

$$\begin{aligned} p(\mathbf{E}_k^m | \mathbf{y}^k) &= p(\mathbf{E}_k^m | \mathbf{y}_k, \mathbf{y}^{k-1}) \\ &= \frac{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{E}_k^m, \mathbf{y}^{k-1}) \cdot p(\mathbf{E}_k^m | \mathbf{y}^{k-1})}{\Delta} \end{aligned} \quad (7.21)$$

其中

$$\Delta = \sum_{m=0}^{N+1} p(\mathbf{E}_k^m | \mathbf{y}^k)$$

增广存在性(式(7.21))的预测概率 $p(\mathbf{E}_k^m | \mathbf{y}^{k-1})$ 由以下步骤获得:

$$\begin{aligned} p(\mathbf{E}_k^0 | \mathbf{y}^{k-1}) &= \gamma_{11} p(\mathbf{E}_{k-1}^0 | \mathbf{y}^{k-1}) \\ p(\mathbf{E}_k^1 | \mathbf{y}^{k-1}) &= \gamma_{10} p(\mathbf{E}_{k-1}^0 | \mathbf{y}^{k-1}) \\ p(\mathbf{E}_k^m | \mathbf{y}^{k-1}) &= p(\mathbf{E}_{k-1}^{m-1} | \mathbf{y}^{k-1}) \end{aligned}$$

其中, $m = 2, \dots, N$, 而

$$p(\mathbf{E}_k^{N+1} | \mathbf{y}^{k-1}) = p(\mathbf{E}_{k-1}^N | \mathbf{y}^{k-1}) + p(\mathbf{E}_k^{N+1} | \mathbf{y}^{k-1})$$

增广存在性的预测方程可概括为

$$\begin{bmatrix} p(\mathbf{E}_k^0 | \mathbf{y}^{k-1}) \\ p(\mathbf{E}_k^1 | \mathbf{y}^{k-1}) \\ p(\mathbf{E}_k^2 | \mathbf{y}^{k-1}) \\ p(\mathbf{E}_k^3 | \mathbf{y}^{k-1}) \\ \vdots \\ p(\mathbf{E}_k^N | \mathbf{y}^{k-1}) \\ p(\mathbf{E}_k^{N+1} | \mathbf{y}^{k-1}) \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} p(\mathbf{E}_{k-1}^0 | \mathbf{y}^{k-1}) \\ p(\mathbf{E}_{k-1}^1 | \mathbf{y}^{k-1}) \\ p(\mathbf{E}_{k-1}^2 | \mathbf{y}^{k-1}) \\ p(\mathbf{E}_{k-1}^3 | \mathbf{y}^{k-1}) \\ \vdots \\ p(\mathbf{E}_{k-1}^N | \mathbf{y}^{k-1}) \\ p(\mathbf{E}_{k-1}^{N+1} | \mathbf{y}^{k-1}) \end{bmatrix} \quad (7.22)$$

式中: \mathbf{J} 为马尔可夫转移概率矩阵, 定义为

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

式(7.21)中的似然函数项 $p(\mathbf{y}_k | \mathbf{E}_k^m, \mathbf{y}^{k-1})$, 取决于目标的存在性。对于 $m = 0$, 假设目标存在, 于是似然函数变成

$$p(\mathbf{y}_k | \mathbf{E}_k^0, \mathbf{y}^{k-1}) = p(\mathbf{y}_k | \mathbf{E}_k = 1, \mathbf{y}^{k-1}) = \delta = \left(\frac{1}{V_k}\right)^{m_k} p_0(m_k)(1 - \delta_k)$$

其中

$$\delta_k = \begin{cases} P_D P_G \left[1 - \frac{V_k}{\hat{m}_k} \sum_{i=1}^{m_k} \Lambda_k^i \right] & m_k > 0 \\ P_D P_G & m_k = 0 \end{cases} \quad (7.23)$$

P_D 和 P_G 分别为目标检测概率和波门概率;

m_k 为确认观测的总数;

V_k 为波门的体积;

\hat{m}_k 为确认观测的期望个数,由下式给出:

$$\hat{m}_k = \begin{cases} m_k - P_D P_G p(\mathbf{E}_k^0 | \mathbf{y}_{k-1}) & m_k > 0 \\ 0 & m_k = 0 \end{cases} \quad (7.24)$$

Λ_k^i 为第 i 个确认观测的似然函数;

$p_0(m_k)$ 为杂波观测个数的泊松概率密度函数。

对于 $p(\mathbf{y}_k | \mathbf{E}_k^m, \mathbf{y}^{k-1})$, $m = 2, \dots, N+1$, 目标在 k 时刻被假定不存在, 因此其似然函数仅包含杂波的似然函数:

$$p(\mathbf{y}_k | \mathbf{E}_k^m, \mathbf{y}^{k-1}) = \left(\frac{1}{V_k}\right)^{m_k} p_0(m_k) \quad (7.25)$$

将以上结果代回到式(7.21), 增广存在性的递推即可完成:

$$p(\mathbf{E}_k^m | \mathbf{y}^k) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} \delta \times p(\mathbf{E}_k^0 | \mathbf{y}^{k-1}) & m = 0 \\ \frac{1}{\Delta} \left(\frac{1}{V_k}\right)^{m_k} p_0(m_k) \times p(\mathbf{E}_k^m | \mathbf{y}^{k-1}) & N+1 > m > 0 \end{cases} \quad (7.26)$$

其中

$$\Delta = \delta \times p(\mathbf{E}_k^0 | \mathbf{y}^{k-1}) + \left(\frac{1}{V_k}\right)^{m_k} p_0(m_k) \times p(\mathbf{E}_k^m | \mathbf{y}^{k-1})$$

将这一操作概括为一个函数的形式为

$$[\{p(\mathbf{E}_k^m | \mathbf{y}^k)\}_{m=0}^{N+1}] = \text{ASTEX}_E[\{p(\mathbf{E}_{k-1}^m | \mathbf{y}^{k-1})\}_{m=0}^{N+1}]$$

7.6.2 增广状态 AS-IPDA 平滑递推

平滑估计的基于目标存在性的状态密度(类似于 IPDA)定义为

$$p(\mathbf{X}_k | \mathbf{E}_k^0, \mathbf{y}^k) \quad (7.27)$$

利用贝叶斯定理, 状态密度可由下式计算:

$$\begin{aligned}
p(\mathbf{X}_k | \mathbf{E}_k^0, \mathbf{y}^k) &= p(\mathbf{X}_k | \mathbf{E}_k^0, \mathbf{y}_k, \mathbf{y}_{k-1}) \\
&= \frac{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{X}_k, \mathbf{E}_k^0, \mathbf{y}_{k-1}) p(\mathbf{X}_k | \mathbf{E}_k^0, \mathbf{y}_{k-1})}{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{E}_k^0, \mathbf{y}_{k-1})}
\end{aligned}$$

这一阐述与标准 IPDA 滤波器完全一致,因此,AS-IPDA 的状态估计可以与 IPDA 滤波器一样的方式进行。

7.6.3 AS-IPDA 平滑方程

算法 43 k 时刻 AS-IPDA 滤波递推公式

(1) k 时刻输入:

- ① 传感器产生的观测集合 \mathbf{Y}_k ;
- ② 目标存在概率 $\{p(\mathbf{E}_{k-1}^m | \mathbf{y}^{k-1})\}_{m=0}^{N+1}$;
- ③ 目标状态估计的均值 $\hat{\mathbf{X}}_{k-1|k-1}$ 和协方差 $\mathbf{P}_{k-1|k-1}$ 。

(2) 航迹状态预测:

$$\begin{aligned}
p(\mathbf{E}_k^0 | \mathbf{y}^{k-1}) &= \gamma_{11} p(\mathbf{E}_{k-1}^0 | \mathbf{y}^{k-1}) \\
[\hat{\mathbf{X}}_{k|k-1}, \mathbf{P}_{k|k-1}] &= \text{KF}_P[\hat{\mathbf{X}}_{k-1|k-1}, \mathbf{P}_{k-1|k-1}, \mathbf{F}_k, \mathbf{Q}_k]
\end{aligned}$$

(3) 观测选择:

$$[\mathbf{y}_k, V_k] = \text{MS}_1[\mathbf{y}_k, \hat{\mathbf{X}}_{k|k-1}, \mathbf{P}_{k|k-1}, \mathbf{H}_k, \mathbf{R}_k]$$

(4) 所有预选观测 i 的似然函数:

$$[\{p_k(i)\}_i] = \text{ML}_1[\{\mathbf{y}_k(i)\}_i, \hat{\mathbf{X}}_{k|k-1}, \mathbf{P}_{k|k-1}, \mathbf{H}_k, \mathbf{R}_k]$$

(5) **if** 非参数跟踪 **then**

(6) 通过式(5.77)计算 V_k 。

(7) 杂波观测密度估计:

$$\rho = \hat{m}_k / V_k = (m_k - P_D P_G p(\mathbf{E}_k^0 | \mathbf{y}^{k-1})) / V_k$$

(8) **end if**

(9) 单目标数据关联:

$$[-, \{\boldsymbol{\beta}_k(i)\}_{i=0}^{m_k}] = \text{STDA}[p(\mathbf{E}_k^0 | \mathbf{y}^{k-1}), \{p_k(i)\}_{i=1}^{m_k}]$$

(10) 增广存在性概率更新:

$$[\{p(\mathbf{E}_k^m | \mathbf{y}^k)\}_{m=0}^{N+1}] = \text{ASTEX}_E[\{p(\mathbf{E}_{k-1}^m | \mathbf{y}^{k-1})\}_{m=0}^{N+1}]$$

(11) 估计/合并:

$$[\hat{\mathbf{X}}_{k|k}, \mathbf{P}_{k|k}] = \text{PDA}_E[\hat{\mathbf{X}}_{k|k-1}, \mathbf{P}_{k|k-1}, \{\mathbf{y}_k(i)\}_{i=1}^{m_k}, \{\boldsymbol{\beta}_k(i)\}_{i=0}^{m_k}, \mathbf{H}_k, \mathbf{R}_k]$$

(12) 估计输出:航迹状态均值 $\hat{\mathbf{X}}_{k|k}$ 和协方差 $\mathbf{P}_{k|k}$ 。

7.7 演示实例

7.7.1 仿真场景

考察一个长为 1000m、宽为 400m 的二维监视区域,每个仿真实验包含 $N = 1000$ 次执行,每次运行仿真 30 个扫描周期,扫描间隔为 $T = 1\text{s}$ 。

仿真中,目标在此区域中以近似恒定速度的速度运动,速度扰动为一零均值噪声,代表微小机动。目标运动模型在笛卡儿坐标系建立:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{F} \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{w}$$

其中:

(1) 目标状态由二维平面上的位置和速度构成: $\mathbf{x}_k = [x_k \quad \dot{x}_k \quad y_k \quad \dot{y}_k]^T$ 。

(2) 状态转移矩阵为

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & T & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & T \end{bmatrix}$$

(3) \mathbf{w} 为零均值高斯白噪声,其协方差为

$$\mathbf{Q} = q \begin{bmatrix} T^4/4 & T^3/2 & 0 & 0 \\ T^3/2 & T^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T^4/4 & T^3/2 \\ 0 & 0 & T^3/2 & T^2 \end{bmatrix}$$

q 设为 0.75。

每次仿真的起始时刻,目标状态为

$$\mathbf{x}_1 = [130\text{m} \quad 35\text{m/s} \quad 200\text{m} \quad 0\text{m/s}]^T$$

如果检测到目标,传感器提供关于目标的位置观测。传感器的观测模型为

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{H} \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k$$

其中

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

\mathbf{v}_k 为零均值高斯白噪声,其协方差为

$$\mathbf{R} = r \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{m}^2$$

r 取值为 25。

每种平滑算法均采用固定延迟 3。考察各算法的均方根(RMS)误差,由 1000 次仿真结果统计而得。航迹初始化采用两点差分法。

7.7.2 增广状态卡尔曼平滑器

将 AS - KS 的性能与标准 KF 进行比较,图 7.5 和 7.6 给出了每个状态分量的 RMS 误差。注意,由于平滑算法采用了固定延迟 3 步的方法,因此最后两个时间点上没有 3 个观测从而无法获得平滑估计,因此这两点的 RMS 误差要比之前的时间点大(图 7.5 ~ 图 7.11 均是这样)。

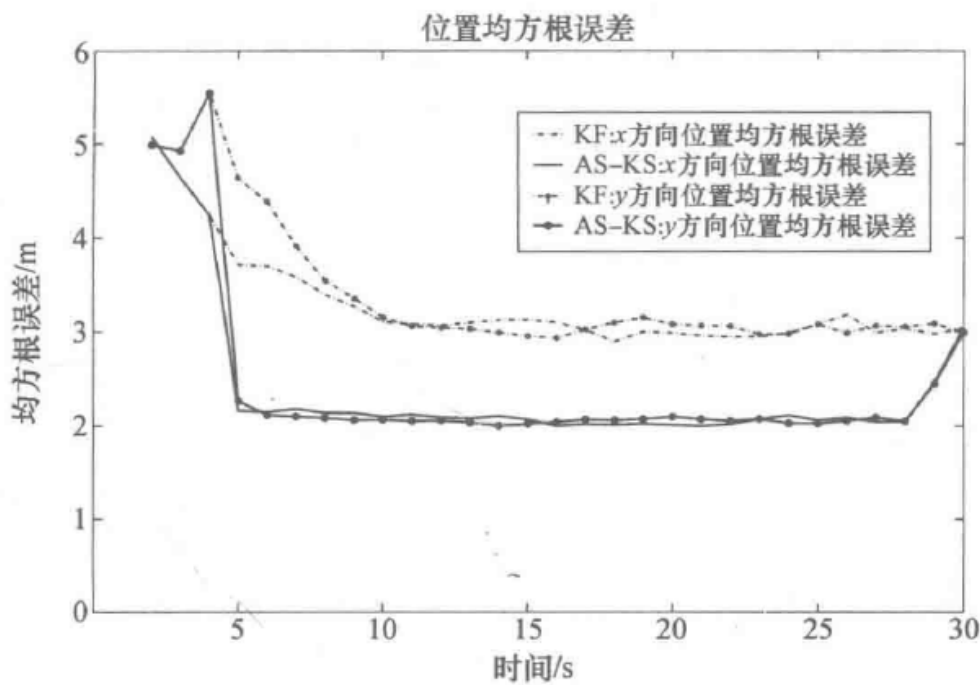


图 7.5 RMS 位置误差:AS - KS 与 KF

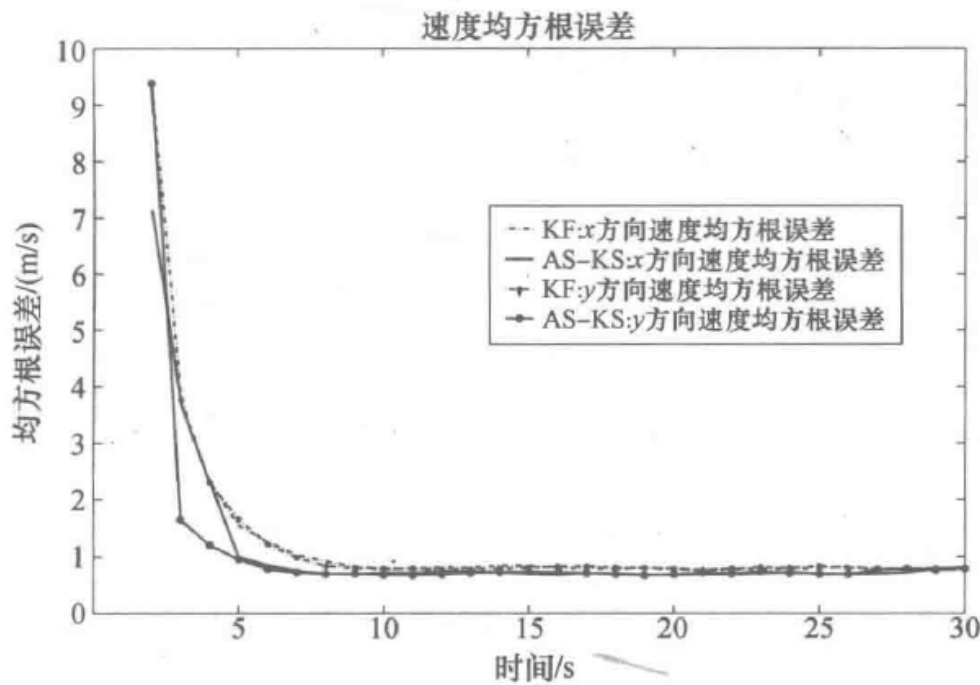


图 7.6 RMS 速度误差:AS - KS 与 KF

7.7.3 增广状态 PDA 平滑器

杂波按照每次扫描强度 $\lambda = 1 \times 10^{-4}/\text{m}^2$ 的泊松分布产生,杂波在监视区域内均匀分布。传感器以检测概率 $P_d = 0.9$ 对目标进行检测(这意味着传感器会在某些扫描周期漏检目标)。来自目标的观测落入确认波门的概率 $P_c = 0.99$,对于二维椭圆体来说,确认波门门限为 9。

图 7.7 和图 7.8 给出了 AS-PDAS 与标准 PDA 算法的性能比较。

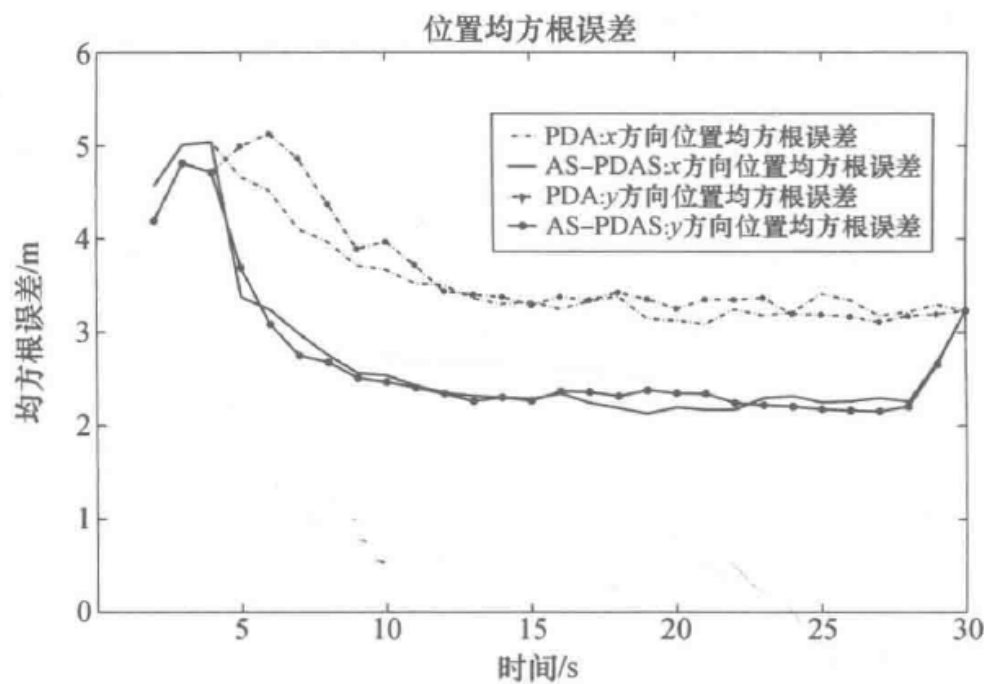


图 7.7 RMS 位置误差:AS-PDAS 与 PDA

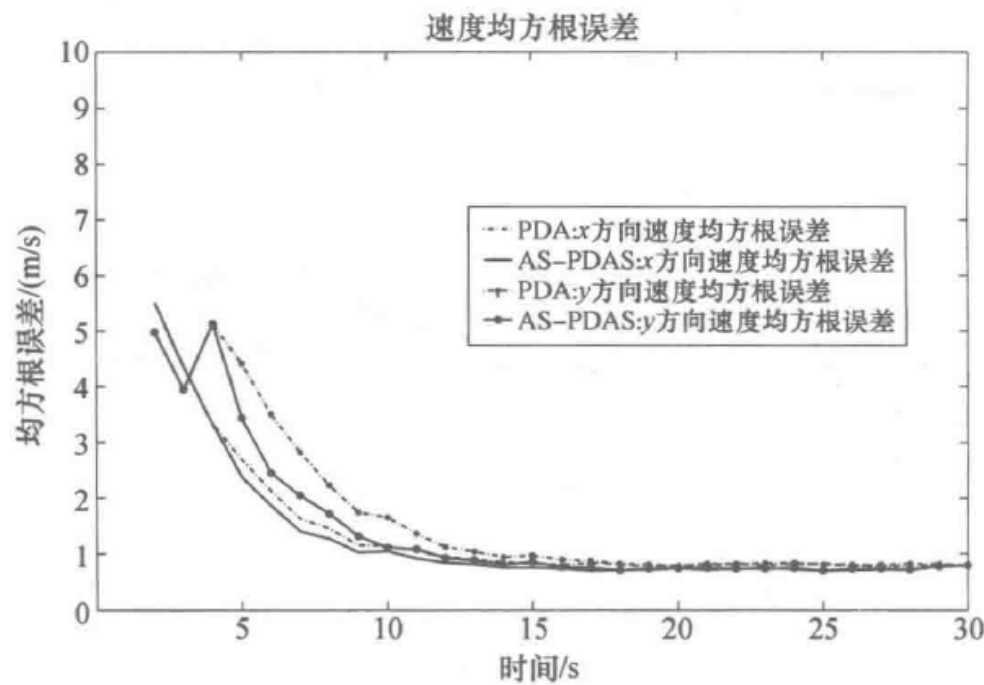


图 7.8 RMS 速度误差:AS-PDAS 与 PDA

7.7.4 增广状态 IPDA 平滑器

杂波及传感器检测模型同 7.7.3 节 PDA 仿真。考虑到 7.6.1 中讨论的问题，目标存在性转移概率矩阵 Γ 的唯一参数是 γ_{11} ，仿真中将其设为 $\gamma_{11} = 0.98$ ，于是同时设定 $\gamma_{10} = 1 - \gamma_{11} = 0.02$ 。

图 7.9 和图 7.10 中给出了 AS-IPDA 的算法性能及其与 IPDA 的比较。

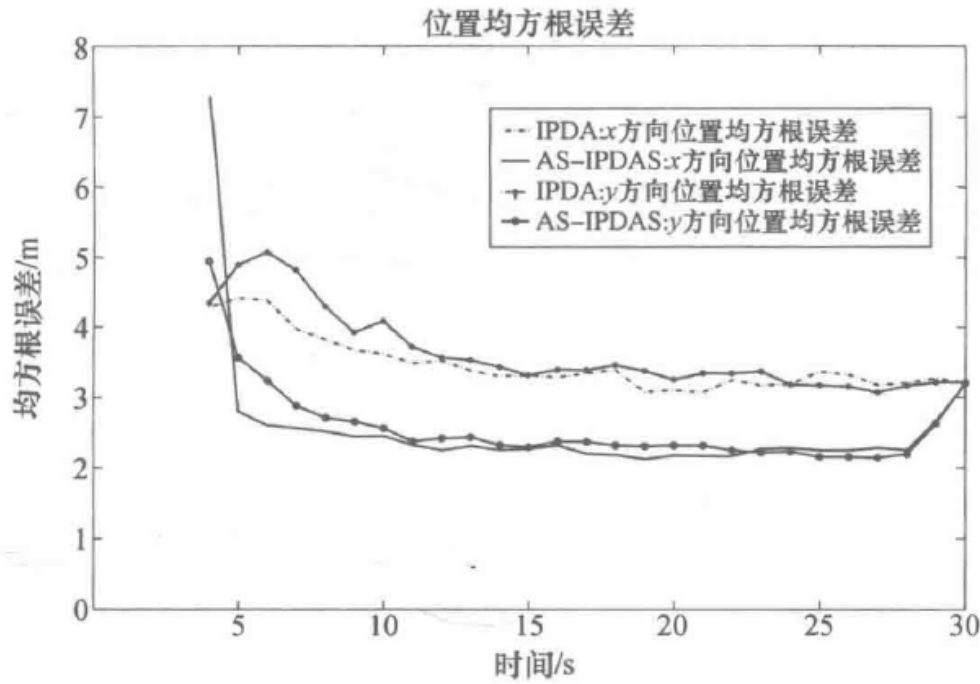


图 7.9 RMS 位置误差:AS-IPDAS 与 IPDA

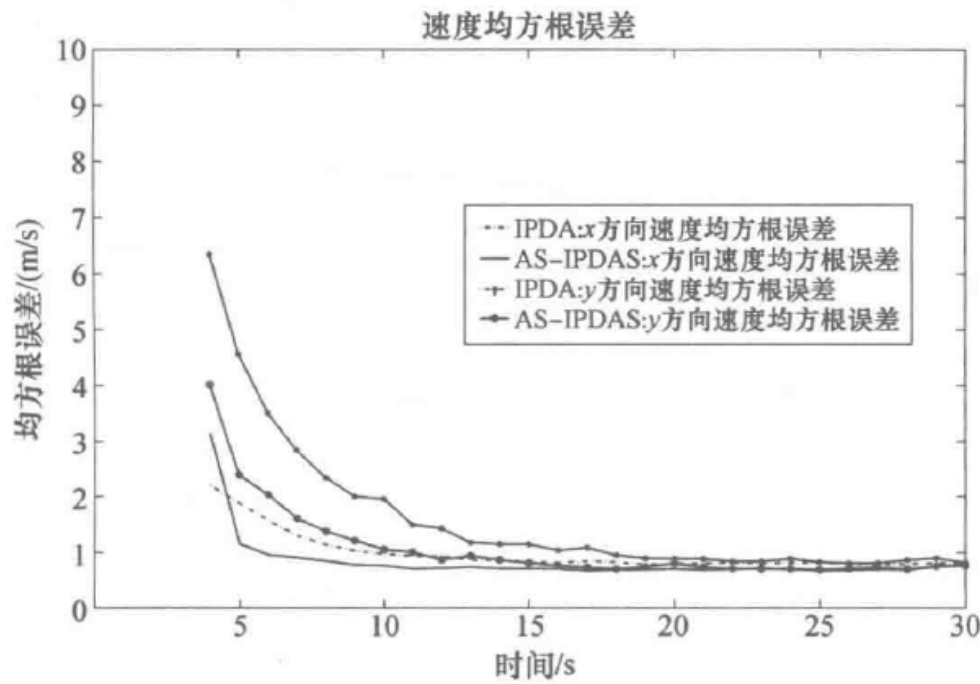


图 7.10 RMS 速度误差:AS-IPDAS 与 IPDA

此外,IPDA(包括平滑和滤波)算法还提供了子区分真假航迹的测度。仿真中,IPDA 滤波器的航迹确认和终止目标存在概率门限分别设为 0.95 和 0.1。AS-IPDA 的航迹确认和终止概率门限分别为 0.3 和 0.001。以上概率门限的使用是为

了设定虚假航迹指标(滤波和平滑算法分别为 469 和 497 每次运行)以保证各算法的 RMS 误差与航迹发现能力保持一致,从而便于性能的比较。图 7.11 给出了各算法确认的真实航迹数。

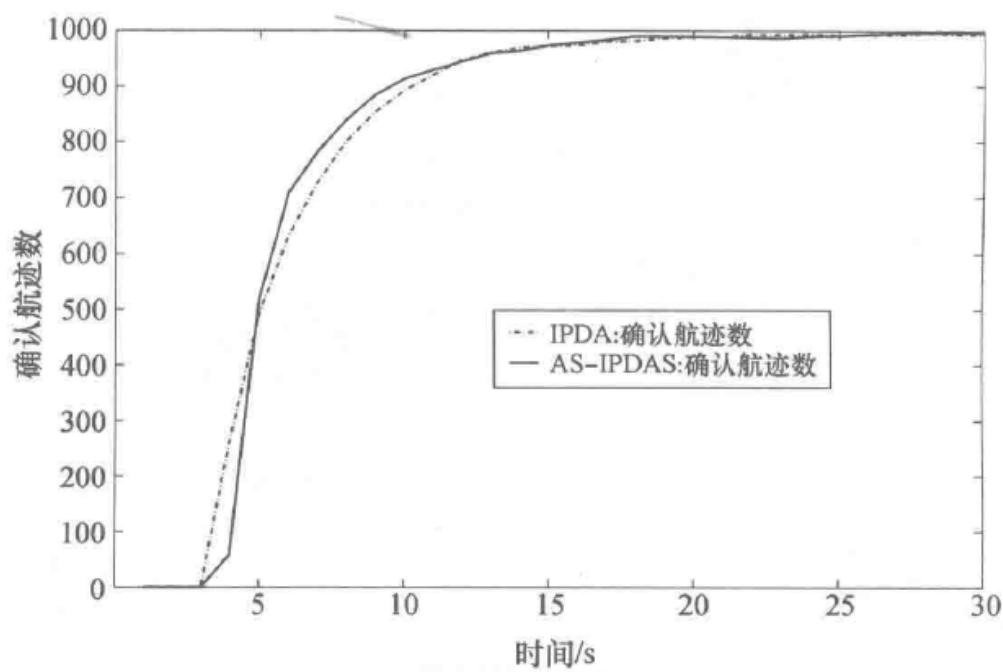


图 7.11 确认航迹数:AS - IPDAS 与 IPDA

7.8 小 结

本章介绍了平滑技术。首先给出了最优贝叶斯平滑公式,然后讨论了一些重要跟踪场景中的平滑算法:机动和非机动目标跟踪、杂波环境下存在性确定和不确定的目标跟踪。几个仿真实例验证了平滑算法相对于标准滤波算法的性能改进。

第8章 基于延时、乱序观测的目标跟踪

对通过复杂通信网络进行互联的传感器网络越发依赖,使得利用延时、乱序观测的目标跟踪成为一个越来越重要的问题。在这样的系统中,经常出现观测到达处理中心的循序不同于观测时间循序的情况。这一问题在文献中曾以不同的名称描述,如乱序观测(OOSM)问题(Blackman 和 Popoli, 1999^[22]; Bar - Shalom, 2000^[5]),随机采样和延时跟踪问题(Marcus, 1979^[108]; Hilton 等, 1993^[68]; Thomopoulos 和 Zhang, 1994^[153]),以及引入随机时延观测问题(Ravn 等, 1998^[138])。本章将给出这一问题的一个贝叶斯解,并给出对杂波和非杂波环境下的单个或多个延时观测的近似、可行的算法。基于线性高斯假设,非杂波和杂波环境下的贝叶斯解分别退化为增广状态卡尔曼滤波(AS - KF)和增广状态概率数据关联(AS - PDA)。这实际上类似于第7章介绍的平滑算法(Challa 等, 2002c^[41], 2003^[44]; Wang 和 Challa, 2003^[160])。

8.1 OOSM 问题的最优贝叶斯解

8.1.1 目标运动模型及传感器观测方程

目标运动模型通常由离散状态方程描述,即

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{F} \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_{k+1} \quad (8.1)$$

传感器观测模型为

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{H} \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \quad (8.2)$$

式中: \mathbf{H} 为传感器观测矩阵; \mathbf{F} 为状态转移矩阵。

记标准的观测序列为 $\mathbf{y}^k = \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_k\}$,标准的目标跟踪问题成为一个求解目标状态条件均值,即

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} \triangleq E(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}^k) \quad (8.3)$$

及对应误差协方差的问题,即

$$\mathbf{P}_{k|k} \triangleq E[(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k})(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k})' | \mathbf{y}^k] \quad (8.4)$$

处理通过通信链路网络互联的多个传感器时,出现了一个关键的问题,那就是传感器与跟踪处理器之间的时延问题。这一问题可以描述为:当对应时间 τ 的观测,有

$$\mathbf{y}_\tau = \mathbf{H}_\tau \mathbf{x}(\tau) + \mathbf{v}(\tau) \quad (8.5)$$

在 t_k 时刻到达, 此时式(8.3)和式(8.4)均已计算完成, 将面临一个如何使用延时观测式(8.5)更新状态估计和协方差的问题, 也就是说计算

$$\hat{x}_{\tau|k} \triangleq E(x_k | y^k, y_\tau) \quad (8.6)$$

和

$$P_{\tau|k} \triangleq E[(x_k - \hat{x}_{k|k})(x_k - \hat{x}_{k|k})' | y^k, y(\tau)] \quad (8.7)$$

的问题。

8.1.2 最优贝叶斯滤波

记 x_k 为 t_k 时刻的目标状态, y_τ 为对应于 τ 时刻的延时传感器观测集, y^k 为 t_k 时刻以前接收到的传感器观测序列。

所有观测 y^k 处理完以后, 关于目标状态 x_k 的所有信息可由概率密度函数 $p(x_k | y^k)$ 描述, 若在 t_k 时刻接收到 $\tau < t_k$ 时刻的观测 y_τ , 则出现 OOSM 问题。OOSM 问题的解须用 y_τ 对 $p(x_k | y^k)$ 进行更新以获得 $p(x_k | y^k, y_\tau)$ 。

应用贝叶斯定理, 有

$$p(x_k | y^k, y_\tau) = \frac{p(y_\tau | x_k, y^k)p(x_k | y^k)}{p(y_\tau | y^k)} \quad (8.8)$$

考察式(8.8)的分子, 引入 τ 时刻的目标状态 x_τ , 有

$$\begin{aligned} p(y_\tau | x_k, y^k)p(x_k | y^k) &= \int p(y_\tau, x_\tau | x_k, y^k)p(x_k | y^k)dx_\tau \\ &= \int p(y_\tau | x_\tau, x_k, y^k)p(x_\tau | x_k, y^k)p(x_k | y^k)dx_\tau \end{aligned}$$

由于 $p(x_\tau | x_k, y^k) = p(x_\tau | x_k, y^k)p(x_k | y^k)$, 因此有

$$p(y_\tau | x_k, y^k)p(x_k | y^k) = \int p(y_\tau | x_\tau, x_k, y^k)p(x_\tau, x_k | y^k)dx_\tau \quad (8.9)$$

将式(8.9)代回到式(8.8), 得

$$\begin{aligned} p(x_k | y^k, y_\tau) &= \frac{\int p(y_\tau | x_\tau, x_k, y^k)p(x_\tau, x_k | y^k)dx_\tau}{p(y_\tau | y^k)} \\ &= \int \frac{p(Y(\tau) | x(\tau), x_k, Y^k)p(x(\tau), x_k | Y^k)dx_\tau}{p(Y(\tau) | Y^k)}dx(\tau) \end{aligned}$$

应用贝叶斯定理的逆定理, 有

$$p(x_k | Y^k, Y(\tau)) = \int p(x(\tau), x_k | Y^k, Y(\tau))dx(\tau) \quad (8.10)$$

于是可以看出, OOSM 问题的解决, 涉及考察当前状态和延时观测对应时刻状态的联合密度的问题。

推广一下, 带有多步延时的 OOSM 问题可以描述为: 令 t_k 时刻接收到延时观

测为 $Y(\tau) = \{Y(\tau_1), Y(\tau_2), \dots, Y(\tau_d)\}$, 其中 $\tau_i < t_k, \forall i \in \{1, \dots, d\}$, τ_d 为最大时延。那么, OOSM 问题的解即为确定密度:

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}^k, Y(\tau)) = \int_{\mathbf{x}(\tau_1)} \int_{\mathbf{x}(\tau_2)} \cdots \int_{\mathbf{x}(\tau_d)} p(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}(\tau_1), \mathbf{x}(\tau_2), \dots, \mathbf{x}(\tau_d) | \mathbf{Y}^k, Y(\tau)) \times \\ d\mathbf{x}(\tau_1), d\mathbf{x}(\tau_2), \dots, d\mathbf{x}(\tau_d) \quad (8.11)$$

这表明, OOSM 问题的解涉及对一个增广状态向量 $\mathbf{x}_k = [\mathbf{x}(t_k), \mathbf{x}(\tau_1), \dots, \mathbf{x}(\tau_d)]^T$ 的联合概率密度的贝叶斯递归过程, 即

$$p(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}(\tau_1), \mathbf{x}(\tau_2), \dots, \mathbf{x}(\tau_d) | \mathbf{Y}^k, Y(\tau)) = p(\mathbf{X}_k | \mathbf{Y}^k, Y(\tau)) \quad (8.12)$$

考虑离散系统

$$\tau_1 = t_{k-1}, \tau_2 = t_{k-2}, \dots, \tau_d = t_{k-d}$$

注意, 一般而言, 时延观测时刻 τ 不需一定与时间 $t_{k-1}, t_{k-2}, \dots, t_{k-d}$, 恰好对齐, 也就是说 τ 有可能落在 $t_{k-i}, i \in [1, d]$ 附近的区间。如果 τ 落在以 t_k 为中心的区间 $[t_k - \frac{\Delta}{2}, t_k + \frac{\Delta}{2}]$, 如图 8.1 所示, 近似取 $\tau = t_k$ 。 $\Delta = t_k - t_{k-1}, \forall k$ 给出了增广状态中相邻状态之间的延迟。由此引起的误差称为量化误差。小 Δ 意味着小量化误差, 同时也导致增广状态中更多的延迟量, 并需要更多的计算量以覆盖最大时延。因此, 在 Δ 的选择和算法计算负荷之间平衡成为使用增广状态方法解决 OOSM 时一个重要的问题。

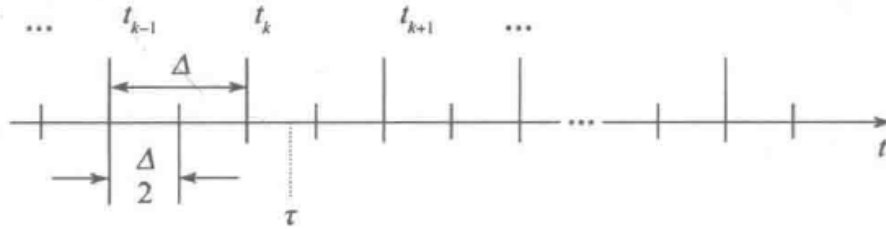


图 8.1 延时 τ 的工程近似

利用贝叶斯定理, 式(8.12)变成

$$p(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}(t_{k-1}), \dots, \mathbf{x}(t_{k-d}) | \mathbf{Y}^k, Y(\tau)) \\ = \frac{1}{\delta} p(Y(\tau) | \mathbf{x}_k, \mathbf{x}(t_{k-1}), \dots, \mathbf{x}(t_{k-d}) | \mathbf{Y}^k) p(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}(t_{k-1}), \dots, \mathbf{x}(t_{k-d}) | \mathbf{Y}^k) \quad (8.13)$$

式中: δ 为归一化常量。

记 $[\mathbf{x}_k, \dots, \mathbf{x}(t_{k-d})]^T$ 为 \mathbf{x}_k^d , 式(8.13)的贝叶斯递归变成

$$p(\mathbf{X}_k^d | \mathbf{Y}^k, Y(\tau)) = \frac{1}{\delta} p(Y(\tau) | \mathbf{X}_k^d, \mathbf{Y}^k) p(\mathbf{X}_k^d | \mathbf{Y}^k) \quad (8.14)$$

如果式(8.14)右边的两个密度是高斯的, 那么该式左边的后验密度也是高斯的, 于是问题的解法退化为关于增广状态的标准卡尔曼滤波(Ho 和 Lee, 1964^[69])。

为了简化本章提出的一系列算法的推导和实现过程, 将当前观测与延时观测

一起包含进来,观测向量成为

$$Y_k = [y(k), y(k-1), \dots, y(k-d)]^T \quad (8.15)$$

因此,更换符号,式(8.14)可以重写为

$$p(X_k^d | Y^{k-1}, Y_k) = \frac{1}{\delta} p(Y_k | X_k^d, Y^{k-1}) p(X_k^d | Y^{k-1}) \quad (8.16)$$

式(8.16)是一个基本关系式,它促使 AS-KF 和 AS-PDA 算法的发展。

8.2 单步和多步乱序观测算法

8.2.1 Y-算法

该算法假设观测延时小于一个采样周期,也就是说 $t_{k-1} \leq \tau \leq t_k$, 定义一个联合高斯随机变量 z_k , 有

$$z_k = \begin{bmatrix} x(t_k) \\ y(\tau) \end{bmatrix} \text{协方差为 } P_z = \begin{bmatrix} P_{xx} & P_{xy} \\ P_{yx} & P_{yy} \end{bmatrix} \quad (8.17)$$

式中

$$P_{xx} = E[(x_k - \hat{x}_{k|k})(x_k - \hat{x}_{k|k})^T | Y^k] = P_{k|k} \quad (8.18)$$

$$P_{yy} = E[(y(\tau) - \hat{y}(\tau))(y(\tau) - \hat{y}(\tau))^T | Y^k] = S_{\tau|k} \quad (8.19)$$

$$P_{xy} = E[(x_k - \hat{x}_{k|k})(y(\tau) - \hat{y}(\tau))^T | Y^k] = P_{yx}^T \quad (8.20)$$

OOSM 问题的解法需要条件密度 $p(x_k | y(\tau), y^k)$ 。利用 Bar-Shalom 和 Fortmann, 1988^[7] 中的结果, 该密度是高斯的, 均值为

$$\hat{x}(t_{k|k}, \tau) = \hat{x}_{k|k} + P_{xy} P_{yy}^{-1} (y(\tau) - \hat{y}(\tau)) \quad (8.21)$$

协方差为

$$P(t_{k|k}, \tau) = P_{xx} - P_{xy} P_{yy}^{-1} P_{yx} \quad (8.22)$$

其中后向预测观测表示为

$$\hat{y}(\tau) = H_\tau F_{\tau|k} [\hat{x}_{k|k} - Q_k(\tau) H_\tau^T S_{\tau|k}^{-1} (y_k - \hat{y}(t_{k|k-1}))] \quad (8.23)$$

式中: H_τ 为 τ 时刻的观测矩阵; $F_{\tau|k}$ 为 t_k 时刻到 τ 时刻的后向转移矩阵^①, 最后一项在 Hilton 等(1993^[68])、Blackman 和 Popoli(1999^[22])以及 Mallick 等(2001a^[107])的文章中被忽略掉了, 它用来应对过程噪声的影响。

式(8.20)中的互协方差 P_{xy} 为

$$P_{xy} = [P_{k|k} - P_{xy}] F_{\tau|k}^T H_\tau^T \quad (8.24)$$

其中

① 尽管 τ 代表时间, 但在不出现混淆的时候, 它也可用来表示时间编号。

$$P_{xy} \triangleq \text{Cov}\{x_k, w_k(\tau) | y^k\} = Q_k(\tau) - P(t_{k|k-1}) H_\tau^T S_k^{-1} H_\tau P(t_{k|k-1}) \quad (8.25)$$

Y-算法需要保存最后一个信息,可以解释为一种非标准的平滑算法,正如 Bar-Shalom, 2000^[5] 指出的那样。

8.2.2 M-算法

M-算法由 Mallick 等(2001a^[107], 2001b^[106])提出,以逼近的方式将 Y-算法拓展至多步延时观测的情况。其关键思想是,在每个时间间隔对每个延时观测都计算式(8.20)的互协方差。然而,它没能考虑过程噪声协方差的非零条件均值,因此它对 Y-算法的拓展是近似的。将延时观测 $y(\tau)$ 描述为当前状态 x_k 的一个函数,多步延时 OOSM 问题可通过以递归的方式计算每个延时观测的互协方差 P_{xy} 解决。举个例子,当时延 τ 大于 n 个采样间隔时,有

$$P_{xy|n} = -M_{k-n+1} Q(k-n+1, k; k-n+1, k) - \sum_{i=1}^n M_{k-i+1} Q(k-i+1, k-i; k-i+1, k) \quad (8.26)$$

其中

$$M_{k-i+1} = \begin{cases} B_k & i = 1 \\ C_k C_{k-1} \cdots C_{k-i+2} B_{k-i+1} & i = 2, \dots, n, \end{cases} \quad (8.27)$$

$$B_i = I - K_i H_i \quad (8.28)$$

$$C_i = B_i F_{i-1|i} \quad (8.29)$$

过程噪声的协方差为

$$Q(k-i+1, k-i; k-i+1, k) \triangleq E\{w(k-i+1, k-i; k-i+1) w^T(k-i+1, k-i; k-i+1)\} \quad (8.30)$$

很显然,在计算式(8.26)中的协方差时,需要评估从观测延迟发生时刻到当前时刻以及期间每一步的过程噪声,还需要计算相应的所有滤波增益。后面要介绍的 AS-KF 算法不需要对过程噪声做显式的评估,只需构建增广状态并执行标准的卡尔曼滤波(KF)计算步骤。

8.3 多步延迟 OOSM 增广状态卡尔曼滤波

对于多步延时,观测向量为式(8.15)的形式,式(8.16)的贝叶斯递归退化为增广状态 X_k^d 的 AS-KF。使用增广状态的系统动态模型可以基于 Anderson 和 Moore(1979^[3])的方法由式(8.1)和式(8.2)构建,即

$$\begin{cases} X_k^d = F_k X_k^d + W_k \\ Y_k = H_k X_k^d + V_k \end{cases} \quad (8.31)$$

其中

$$F_k = \begin{bmatrix} F_{t_k|\tau} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & I & 0 \end{bmatrix} \quad (8.32)$$

式中: F 为离散系统转移矩阵, 观测矩阵为

$$F_k = \begin{bmatrix} H_k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & H_{\tau_1} & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & H_{\tau_d} \end{bmatrix} \quad (8.33)$$

噪声协方差矩阵为

$$R_k = \begin{bmatrix} R_k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R_{\tau_1} & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & R_{\tau_d} \end{bmatrix} \quad (8.34)$$

预测密度及似然函数为

$$p(X_k^d | Y^{k-1}) = \mathcal{N}(X_k^d; \hat{X}_{k|k-1}^d, P_{k|k-1}^d) \quad (8.35)$$

$$p(Y_k | X_k^d, Y^{k-1}) = \mathcal{N}(Y_k; H_k \hat{X}_{k|k-1}^d, S_k^d) \quad (8.36)$$

更新的密度 (Ho 和 Lee, 1964^[69]) 由下式给出:

$$p(X_k^d | Y^k) = N(X_k^d; \hat{X}_{k|k}^d, P_{k|k}^d) \quad (8.37)$$

均值和方差为

$$\hat{X}_{k|k}^d = \hat{X}_{k|k-1}^d + K_k \tilde{Y}_k \quad (8.38)$$

$$P_{k|k}^d = (I - K_k H_k) P_{k|k-1}^d \quad (8.39)$$

其中信息为

$$\tilde{Y}_k = Y_k - H_k \hat{X}_{k|k-1}^d \quad (8.40)$$

协方差为

$$S_k = H_k P_{k|k-1} H_k^T + R_k \quad (8.41)$$

卡尔曼增益矩阵为

$$K_k = P_{k|k-1}^d H_k^T S_k^{-1} \quad (8.42)$$

很显然, 式(8.35) ~ 式(8.42)是增广状态空间模型(2.2节)的标准卡尔曼滤

波方程。这一方法解决了引入延时观测的问题,并提供了平滑后的输出(Anderson 和 Moore,1979^[3])。

8.3.1 迭代 AS - KF

除了可以通过增广的向量和相应的矩阵直接计算,AS - KF 还可以以嵌套的方式实现,即利用不同延时时刻的观测独立地进行迭代计算式(8.38) ~ 式(8.42),这得益于增益矩阵对应不同时刻的列向量相互独立(证明参见附录 A),即

$$K_k = [K_k \quad K_{k-1} \quad \cdots \quad K_{k-d}] \tag{8.43}$$

于是,给定 t_k 时刻收到的观测集合 $Y_k = [y_k, y(t_{k-1}), \cdots, y(t_{k-d})]^T$, AS - KF 状态和协方差的更新方程由式(8.38)和式(8.39)给出,这些可简化为迭代的形式,即

$$\hat{X}_{klk}^d = \hat{X}_{klk-1}^d + \sum_{i=k}^{k-d} K^i \tilde{Y}^i \tag{8.44}$$

$$P_{klk}^d = P_{klk-1}^d - \sum_{i=k}^{k-d} K^i H^i P_{klk-1}^d \tag{8.45}$$

其中, H^i 由式(8.33)给出,除了第 i 个分块元素之外其余全为 0, Y^i 与 Y_k 具有相同维数,但假设只有 Y_k 第 i 个分量到达, K^i 是由 H^i 产生的卡尔曼增益,即

$$K^i = P_{klk-1}^d H^{iT} S_k^{-1} \tag{8.46}$$

上面这些式子与式(8.38)和式(8.39)等效,单实现起来更高效。等效性在附录 A 中给出。

8.3.2 变维增广状态卡尔曼滤波

7.4.2 节中给出的 AS - KF 算法使用包含直到最大延时的所有过去状态的增广状态,这导致计算复杂性增加。一种更加有效的方法是自适应地只增加必要的过去状态并移去增广状态中不再必要的部分。本节介绍这种变维 AS - KF(VDAS - KF)方法。

VDAS - KF 的主要思想是增广矩阵仅仅包含当前状态和没有获得观测的过去状态。当没有 OOSM 时,该滤波器则退化为标准的卡尔曼滤波。图 8.2 给出了 VDAS - KF 的处理过程,分四种情况。

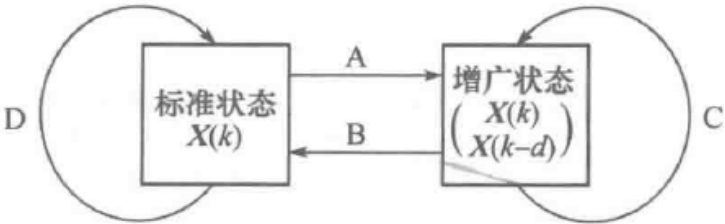


图 8.2 VDAS - KF 过程

(1) 情况 A: 当前时刻的观测有延迟时, 增广目标状态。

(2) 情况 B: 若延时观测 $y(\tau)$ 已经到达并被处理, 增广状态则退化为标准状态向量。

(3) 情况 C: 以下情况出现时, 增广状态的维数不变。

① 延时观测数据 $y(\tau)$ 仍未到达;

② 延时观测已经到达, 但当前观测已经延迟。

(4) 情况 D: 无观测延时, 无增广状态(标准卡尔曼滤波)。

对于以上情形, 一旦状态维数改变, 相应的协方差矩阵也要随之变维。

VDAS-KF 算法比标准的 AS-KF 计算效率高, 但是其实现逻辑比较复杂, 该算法性能及计算效率与 Y-算法相当。

8.4 杂波环境多步 OOSM 增广状态 PDA 滤波

8.4.1 OOSM 增广状态 PDA 滤波的杂波模型

杂波环境下的 OOSM 问题的概率数据关联具有一些有趣的挑战。这种情况下, t_k 时刻的观测可能包含^①对应当前时刻的一个观测集(来自目标或杂波)和对应早些时刻的一些观测集。

于是, 数据具有如下形式:

$$[Y_k, Y(\tau)]^T = \begin{bmatrix} Y_k \\ \vdots \\ Y_{k-d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_k^1 & y_k^2 & \cdots & y_k^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y^1(t_{k-d}) & y^2(t_{k-d}) & \cdots & y^n(t_{k-d}) \end{bmatrix} \quad (8.47)$$

所有可能的当前和延时观测组合构成了增广观测空间的“观测”, 例如, 在 t_k 时刻, 假设收到 4 个观测, 每个时间各两个观测:

$$[Y_k, Y(t_{k-d})] = \begin{bmatrix} y_k^1 & y^1(t_{k-d}) \\ y_k^2 & y^2(t_{k-d}) \end{bmatrix}$$

那么完整的观测集合由所有可能的组合构成:

$$\begin{aligned} Y_k &= \{Y^1, Y^2, Y^3, Y^4\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} y_k^1 \\ y^1(t_{k-d}) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_k^2 \\ y^2(t_{k-d}) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_k^1 \\ y^2(t_{k-d}) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_k^2 \\ y^1(t_{k-d}) \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

这将用来计算增广状态向量的组合信息和数据关联概率。这里用 Y^i 表示当前和过去观测的第 i 个组合, 即增广空间的观测。这些组合的集合记为 Y_k , 它由 t_k

^① 本章用 t_k 表示时间编号 k , 有时用时间编号本身表示它自己, 即 t_k 与 k 等价。

时刻接收的观测组成,即 $Y_k \subset \{Y_k, Y(\tau_1), \dots, Y(\tau_d)\}$ 。增广状态法可以通过增广状态数据关联概率解决数据关联的问题。

8.4.2 增广状态 PDA 滤波

一旦增广空间的观测已经建立,4.3 节的标准 PDA 技术即可用来对增广状态进行估计。与标准 PDA 相似,数据关联概率 $\beta(k)$ 在以下互斥完备事件上定义:

θ_0 : 预选观测均为杂波观测,没有一个来自于目标。

θ_1 : 增广空间中第 I 个观测来自目标,其他全为杂波观测。

$$I = 0, 1, \dots, M_k \quad (8.48)$$

于是, $\beta(k)$ 可表示为

$$\beta_I(k) \triangleq P(\theta_I(k) | Y^k) \quad (8.49)$$

其中: M_k 为增广空间中观测的个数; $\beta_I(k)$ 是增广空间第 I 个观测向量的数据关联概率,它们由 Bar-Shalom 和 Fortmann(1988^[7]) 的标准 PDA 公式计算,此时需要用增广状态空间的观测向量代替标准的观测。

AS-PDA 的状态更新方程为

$$\hat{X}_{k|k}^d = \hat{X}_{k|k-1}^d + K_k \tilde{Y}_k \quad (8.50)$$

式中

$$\tilde{Y}_k = \sum_{I=1}^{M_k} \beta_I(k) (Y_k^I - \hat{Y}_k)$$

协方差更新方程为

$$P_{k|k}^d = \beta_0(k) P_{k|k-1}^d + (I - \beta_0(k)) P_{k|k}^c + \tilde{P}_k \quad (8.51)$$

式中

$$P_{k|k}^c = (I - K_k H_k) P_{k|k-1}^d \quad (8.52)$$

$$\tilde{P}_k = K_k \left[\sum_{I=1}^{M_k} \beta_I(k) \tilde{Y}_k^I \tilde{Y}_k^{I^T} - \tilde{Y}_k \tilde{Y}_k^T \right] K_k^T \quad (8.53)$$

很显然,AS-PDA 的实现需要组合所有不同时间的观测,计算复杂度随着延时观测个数的增加而呈指数型增长。本章后面内容将介绍一种近似但更高效的实现 AS-PDA 的方法。

8.4.3 迭代 AS-PDA 算法

注意式(4.84)中的假设 $\theta_I(k)$ 对应一组在相应时刻发生的假设,由上标表示,即

$$\theta_I(k) \equiv \{\theta_k^i, \theta_{k-1}^j, \dots, \theta_{k-d}^l\} \quad (8.54)$$

于是关联概率 $\beta_I(k)$ 是联合事件式(8.54)的概率,可写成

$$\beta_I(k) \triangleq P(\theta_I | Y^k) = P(\theta_k^i, \theta_{k-1}^j, \dots, \theta_{k-d}^l | Y^k), \quad i, j, l \in \{0, 1, 2, \dots\} \quad (8.55)$$

β 的下标 I 代表式(8.47)中观测向量的一个特定观测组合。采用类似于 θ^i 的记法,我们在 β 上也使用上标 i 以表示与(子)事件 θ^i 对应的数据关联概率,即观测子集 Y_{k-n} ($n=0, 1, \dots, d$) 中第 i 个预选观测是来自目标的观测的概率。基于观测噪声为白噪声以及关联事件 $\{\theta_k^i, \theta_{k-1}^j, \dots, \theta_{k-d}^l\}$ 独立的假设,有

$$\begin{aligned} \beta_I(k) &= \frac{1}{\delta_c} P(Y_k | \theta_I(k), Y^{k-1}) P(\theta_I(k) | Y^{k-1}) \\ &= \frac{1}{\delta_c} P(y_k^i, y_{k-1}^j, \dots, y_{k-d}^l | \theta_k^i, \theta_{k-1}^j, \dots, \theta_{k-d}^l, Y^{k-1}) \times \\ &\quad P(\theta_k^i, \theta_{k-1}^j, \dots, \theta_{k-d}^l, Y^{k-1}) \\ &= \frac{1}{\delta_c} P(y_k^i | \theta_k^i, Y^{k-1}) P(\theta_k^i | Y^{k-1}) P(y_{k-1}^j | \theta_{k-1}^j, Y^{k-1}) P(\theta_{k-1}^j | Y^{k-1}) \dots \\ &\quad P(y_{k-d}^l | \theta_{k-d}^l, Y^{k-1}) P(\theta_{k-d}^l | Y^{k-1}) \\ &= \beta_k^i \beta_{k-1}^j \dots \beta_{k-d}^l \end{aligned} \quad (8.56)$$

式中: δ_c 为基于 $\sum_{I \in M_K} \beta_I(k) = 1$ 这一事实的归一化常量。

基于式(8.56)的关系,给定 k 时刻观测集式(8.47)、式(8.50)和式(8.51)的一个等价的计算方法可由下面的迭代形式给出:

$$\hat{X}_{klk}^d = \hat{X}_{klk-1}^d + \sum_{i=k}^{k-d} K^i \tilde{Y}_i \quad (8.57)$$

$$P_{klk}^d = P_{klk-1}^d - \sum_{i=k}^{k-d} [(K^i H^i - \beta_i^0 K^i H^i) P_{klk-1}^d - \tilde{P}^i] \quad (8.58)$$

其中:上标和下标 i 为时间标记; β_i^0 代表观测子集 Y_i 中没有任何观测是来自目标观测的概率:

$$\tilde{Y}_i = \sum_{j=1}^h \beta_i^j (y_i^j - \hat{y}_i) \quad (8.59)$$

$$\sum_{i=k}^{k-d} \tilde{P}^i = \begin{bmatrix} \tilde{P}_k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \tilde{P}_{k-1} & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \tilde{P}_{k-d} \end{bmatrix} \quad (8.60)$$

其中

$$\tilde{P}_i = K_i \left[\sum_{j=1}^h \beta_i^j \tilde{y}_i^j \tilde{y}_i^{jT} - \tilde{Y}_i \tilde{Y}_i^T \right] K_i^T \quad (8.61)$$

式(8.60)中的结果在附录 B 中证明。标准 AS-PDA 与迭代 AS-PDA 对待

观测的不同之处如图 8.3 所示。

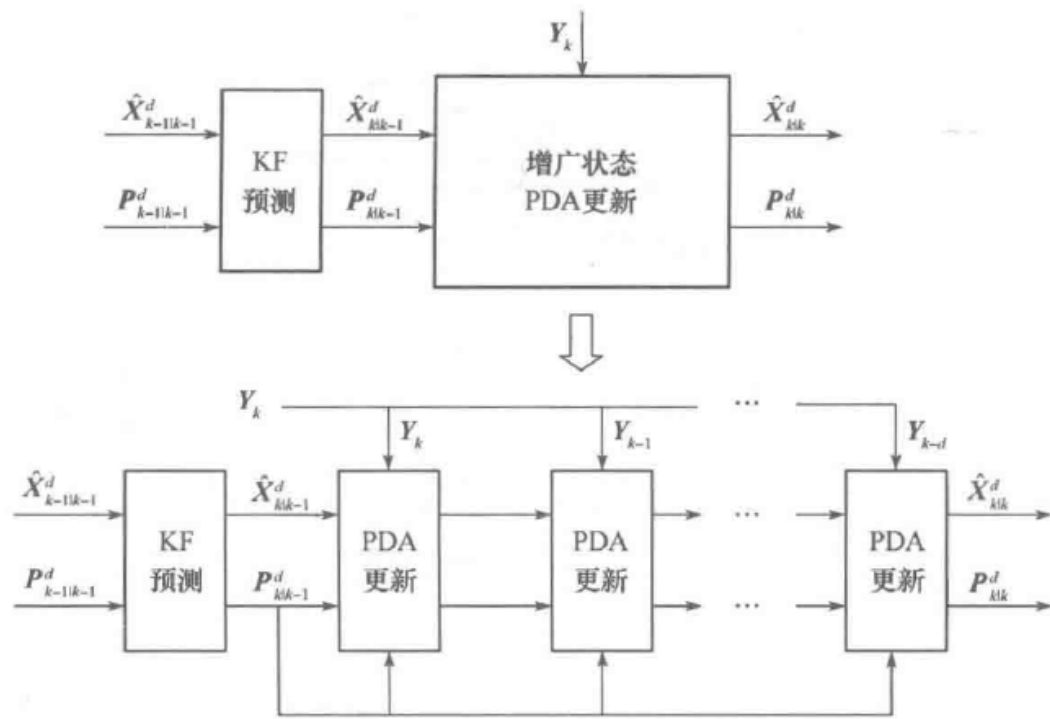


图 8.3 增广状态 PDA 及其计算结构

式(8.57)和式(8.58)的意义在于它们提供了一个近似但有效的 AS - PDA 算法的实现方法,在一个特定时刻收到的所有观测仅适用一次,且不需要进行观测组合。

8.4.4 AS - PDA 方程

算法 44 k 时刻增广状态 PDA 滤波方程

(1) 预测：

$$[\hat{X}_{k|k-1}^d, P_{k|k-1}^d] = \text{KF}_P[\hat{X}_{k-1|k-1}^d, P_{k-1|k-1}^d, F, Q]$$

(2) 对接收的观测集合 Y_k 进行时间(所有时间编号)检测,这里 $i = \{k - d, k - d + 1, \dots, k\}$ 的顺序描述算法迭代。

(3) 如果没有任何观测对应时刻 $i, i = i + 1$,跳到步骤(2)。

(4) 参考式(8.33)和式(8.34)生成 H^i 和 R^i ,除了第 i 个分割元素之外其余全为0。

例如

$$R^{k-d} = \text{Diag}[0 \quad \dots \quad 0 \quad R_{k-d}]$$

式中: R^{k-d} 为标准 KF 中常用的观测协方差矩阵。

(5) 观测验证(波门)：

$$[\{\beta_k(i)\}_{i=0}^{m_k}] = \text{STDA}[\{p_k(i)\}_{i=1}^{m_k}]$$

(6) PDA 更新：

$$[\hat{X}_{k|k}^d, P_{k|k}^d] = \text{PDA}_E[\hat{X}_{k|k-1}^d, P_{k|k-1}^d, \{y_k(i)\}_{i=1}^{m_k}, \{\beta_k(i)\}_{i=0}^{m_k}, H, R]$$

图 8.4 为 AS - PDA 算法单次迭代处理的逻辑流程图。

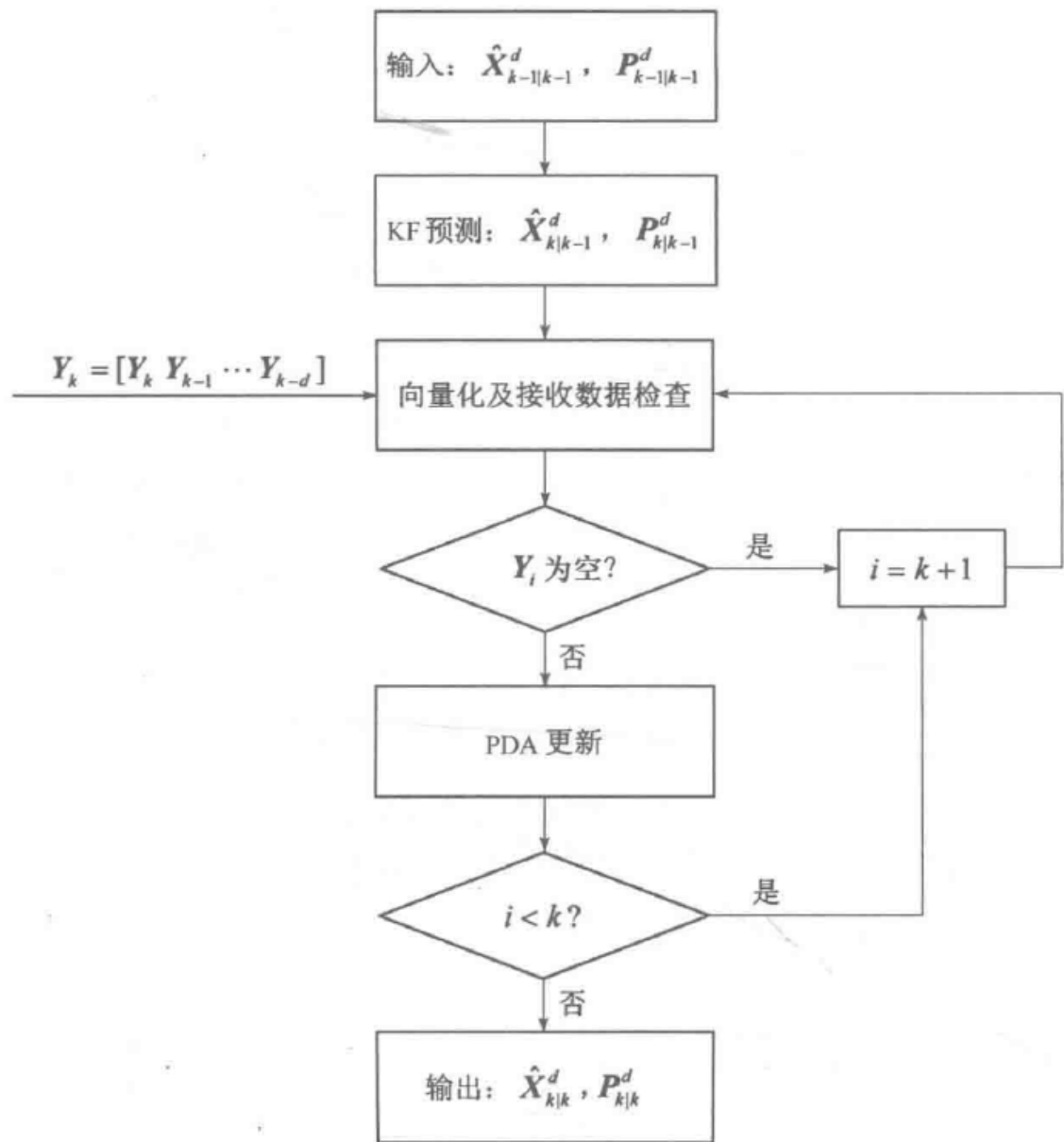


图 8.4 单次扫描 AS - PDA 流程

8.5 仿真结果

本节给出三个数值仿真的例子,对算法的 OOSM 跟踪性能进行了比较,跟踪性能由 500 次蒙特卡罗仿真的均方根(RMS)误差给出。在例 8.1 中,假设 OOSM 只有一步延时。Y - 算法、VDAS - KF 和两步 AS - KF 算法进行了比较。例 8.2 中,考虑一个更一般化的情形,允许有多步延时的 OOSM 跟踪问题,比较了 M - 算法与标准 AS - KF 算法。杂波环境下的 OOSM 问题在最后一个例子中介绍,考察了 AS - PDA 算法的性能。

注意,增广状态滤波器的输出可由增广状态的第一个元素给出,也可由最后一个元素给出。前者指涉及“滤波”^①,对应算法记为“F”;后者则涉及平滑,对应算

① 抛开“滤波”的原意,这里用它来强调当前时刻的滤波器输出。

法记为“S”。例如,AS - KF2 - F 代表具有两步延迟的 AS - KF,其输出由增广状态的第一个元素给出。

8.5.1 例 8.1

这个例子在许多目标跟踪算法的比较中广泛使用,如 Bar - Shalom 和 Fortmann(1988^[7])、Bar - Shalom(2005^[5])和 Mallick 等(2001a,2001b^[106,107]),因为它包含了跟踪里最常用的几种目标运动模型,并且机动指数涵盖了所有可能的机动范围。

离散时间系统方程为

$$x(k) = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(k-1) + v(k) \quad (8.62)$$

式中: $T=1$ 为采样间隔; $v(k)$ 为零均值高斯白噪声,其协方差为

$$\text{Cov}\{v(k)\} = Q(k) = \begin{bmatrix} T^3/3 & T^2/2 \\ T^2/2 & T \end{bmatrix} q \quad (8.63)$$

观测方程为

$$y(k) = [1 \ 0] x(k) + w(k) \quad (8.64)$$

式中: $w(k)$ 为零均值高斯白噪声,协方差为

$$\text{Cov}\{w(k)\} = R(k) = 1 \quad (8.65)$$

基于以上模型,我们设计了一个二维的目标状态模型进行仿真。机动指数定义为(见 Bar - Shalom 和 Li,1993^[8])

$$\lambda = \sqrt{\frac{qT^3}{R}} \quad (8.66)$$

接下来,考察对应于 $\lambda = 0.3$ 和 1 的两种情况(过程噪声 $q = 0.1$ 和 1),即目标沿直线运动或作轻微的机动。每次仿真均随机产生数据,状态初值为

$$x(0) = [200\text{km}, \ 0.5\text{km/s}, \ 100\text{km}, \ -0.08\text{km/s}] \quad (8.67)$$

采用两点差分法对滤波器进行初始化:

$$P(0|0) = \begin{bmatrix} P_0 & 0 \\ 0 & P_0 \end{bmatrix}, \quad P_0 = \begin{bmatrix} R & R/T \\ R/T & 2R/T^2 \end{bmatrix} \quad (8.68)$$

上式作为先验误差协方差或增广状态的初始误差协方差。

本例中,假设观测的最大延时为 1 步,并且数据延时在整个仿真期间均匀分布,当前观测延迟的概率为 P_r 。

图 8.5 和图 8.6 给出了例 8.1 的仿真结果,对 Y - 算法、VDAS - KR 和 AS - KF2 进行了 500 次蒙特卡罗仿真的比较。这些算法的计算量比较在表 8.1 中进行,考察各算法由标准卡尔曼滤波归一化的浮点运算次数。

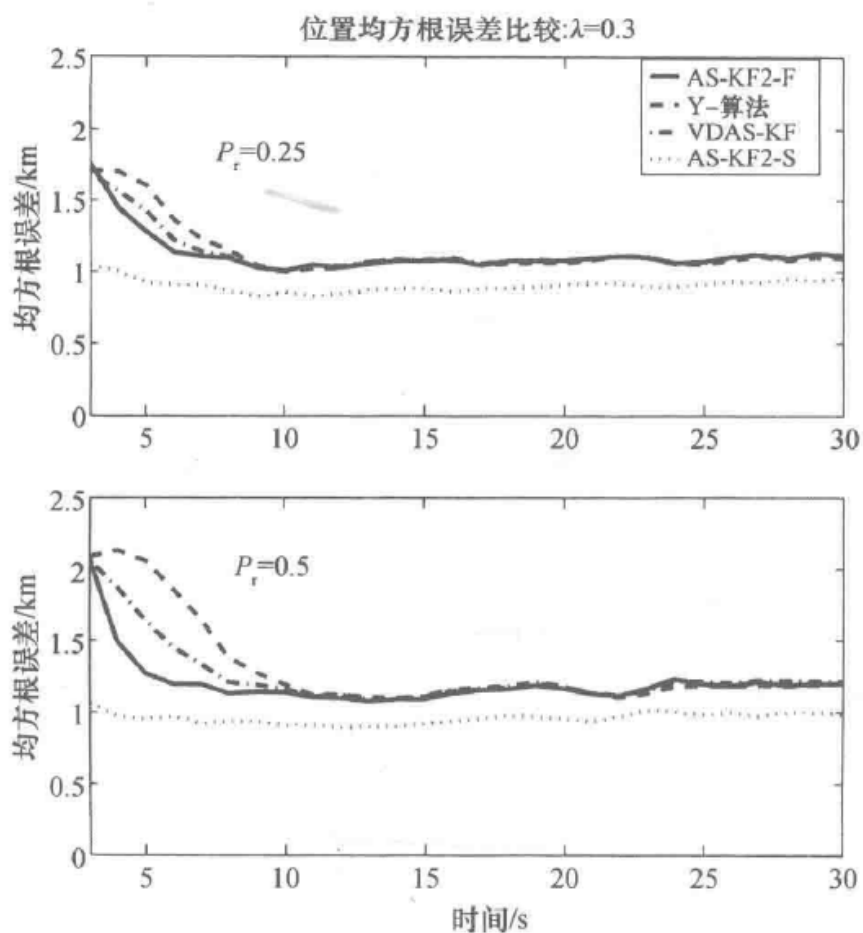


图 8.5 直线运动($\lambda = 0.3$)目标 Y-算法、VDAS-KF 以及 AS-KF2 的 RMS 性能比较,单步延时 OOSM($P_r = 0.25$ 和 0.5)

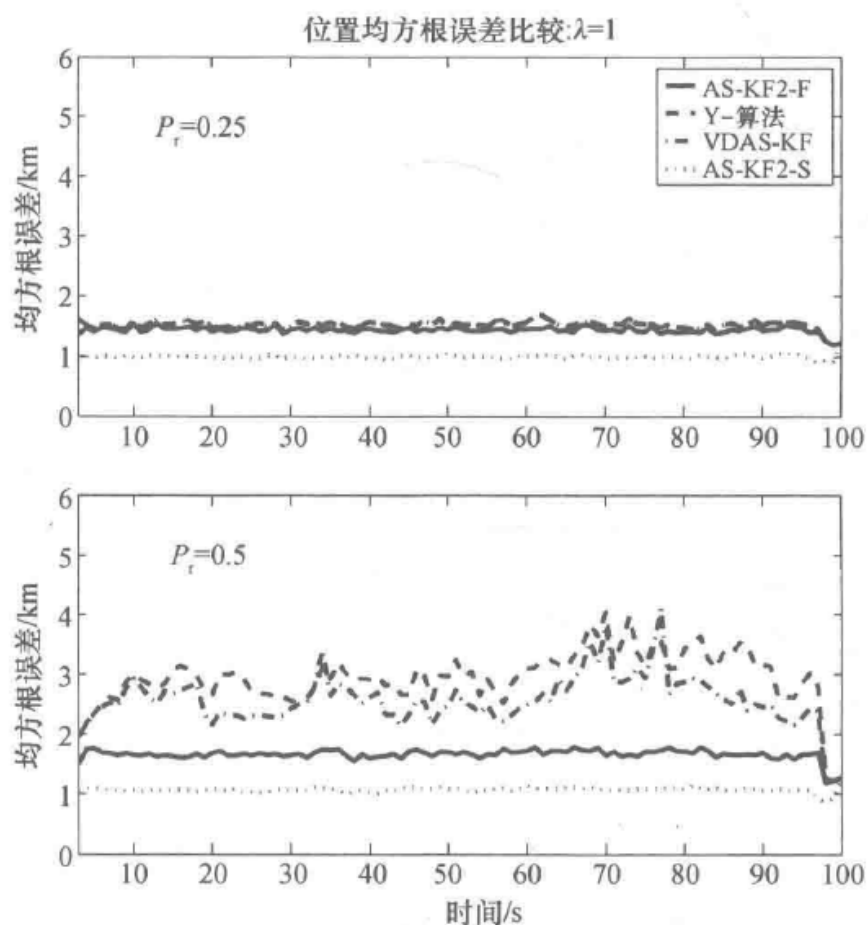


图 8.6 强机动($\lambda = 1$)目标 Y-算法、VDAS-KF 以及 AS-KF2 的 RMS 性能比较,单步延时 OOSM($P_r = 0.5$)

可得出如下结论：

(1) 在各种机动情况下，Y-算法与 VDAS-KF 算法具有相当的 RMS 误差。

(2) AS-KF2 总是优于 Y-算法和 VDAS-KF 算法，当观测延迟的概率增加时，它们之间的性能差别就越大。

(3) AS-KF2-S(平滑 AS-KF 输出)优于所有测试算法，其 RMS 误差最小。

(4) 如表 8.1 所列，VDAS-KF 算法的计算量与 Y-算法相当，而 AS-KF 则需要二倍于前者的计算量。

表 8.1 例 8.1 的计算量比较

P_r	Y-算法	VDAS-KF	AS-KF2-F	AS-KF2-S
0	1	1	5.57	5.57
0.25	2.26	2.60	5.57	5.57
0.5	2.30	2.68	5.57	5.57
0.75	4.41	5.47	5.57	5.57

8.5.2 例 8.2

除了允许多步迟延，本例与例 8.1 完全一样。假设最大延时为 3 个采样间隔（即 $t_k - \tau_{\max} = 3T$ ），随机产生延时观测序列。延时观测在 1、2、3 步延迟中均匀分布， k 时刻观测延迟的概率为 P_r 。

图 8.7 和图 8.8 给出仿真结果，可以看出：

(1) 如图 8.7 所示，对于非机动目标，AS-KF4-F 和 M-算法具有相似的 RMS 性能，无论 OOSM 情况如何。换句话说，OOSM 情况不是决定性的。同样的情况可在例 8.1 的图 8.5 中见到。

(2) AS-KF-F 算法整体上优于 M-算法，而 AS-KF-S 则要优于前面两种算法，这是因为 AS-KF-S 利用每一个延时观测修正增广状态向量中的所有分量，而 M-算法只对当前状态进行修正。

(3) 对于机动目标 ($\lambda = 0.1$)，M-算法的均方根误差大于 AS-KF4，当观测延迟的概率增加时，性能之间的区别将越大，如图 8.8 所示。

(4) $P_r = 0.25$ 时，标准四步延迟 AS-KF 的计算量 11 倍于 M-算法，M-算法需要计算过去的增益序列，为了修正当前状态，M-算法无需考虑过程噪声，而 AS-KF 算法需要缓存所有过去状态。

Mallick 等(2001a^[107])给出了 M-算法的性能，如果过程噪声的条件均值计算正确，其性能有望得到改进。

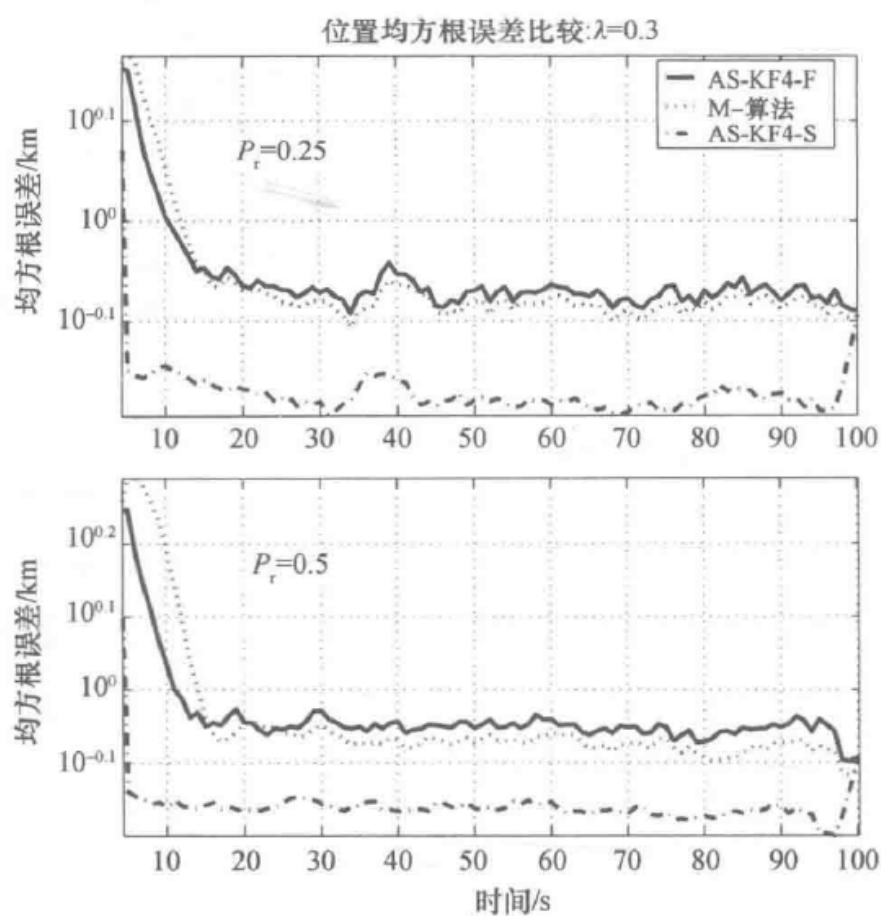


图 8.7 直线运动($\lambda = 0.3$)目标 AS-KF4-F、AS-KF4-S 以及 M-算法的 RMS 性能比较,单步延时 OOSM($P_r = 0.25$ 和 0.5)

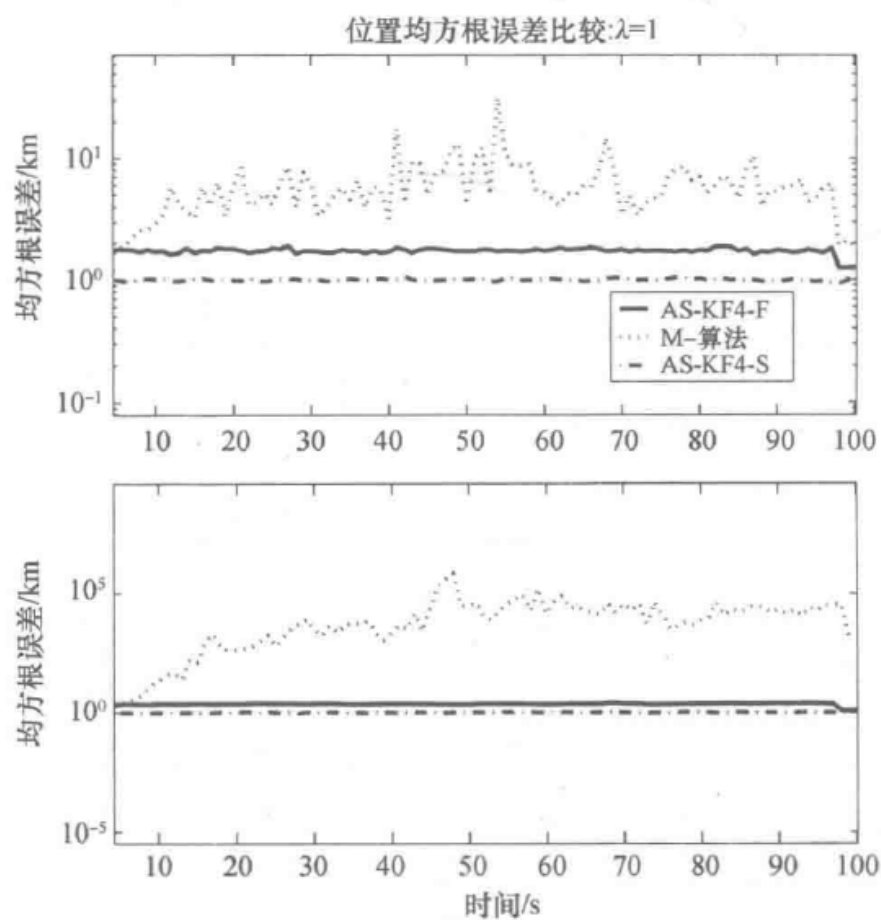


图 8.8 强机动($\lambda = 1$)目标 AS-KF4-F、AS-KF4-S 以及 M-算法的 RMS 性能比较,单步延时 OOSM($P_r = 0.25$ 和 0.5)

8.5.3 例 8.3

例 8.3 关注以下几个方面：

- (1) 将 AS - PDA 算法性能与同维的固定延迟平滑器进行比较,当没有 OOSM 问题时,AS - PDA 退化为 PDA 平滑器,由于进行平滑,因此理应获得更好的性能。
- (2) 比较 AS - PDA 滤波(无延时)和 AS - PDA 平滑(有延时)的输出性能。
- (3) 比较 PDAF 和 AS - PDAF 的计算量。

仿真场景同例 8.2 中一样,其中机动指数为 0.7。另外增加了杂波观测,假设杂波在观测区域内均匀分布,密度为 $C_D = 0.037/\text{km}^2$ 。

仿真实现了一种四步延迟的 AS - PDA 滤波器,对以下每一种场景各进行了 500 次蒙特卡罗仿真：

- (1) “全”观测(无 OOSM)情况的 AS - PDA,记为场景 A。
- (2) 观测延迟概率为 $P_r = 0.25、0.5$ 和 0.75 的 AS - PDA,记为场景 B。
- (3) 将延迟观测视为观测丢失的 AS - PDA,记为场景 C。

图 8.9 比较了这三种场景的均方根(RMS)误差,很明显：

- (1) 当 P_r 增加时,所有算法的性能均变差。
- (2) 场景 A 和场景 B 的性能几乎一样。

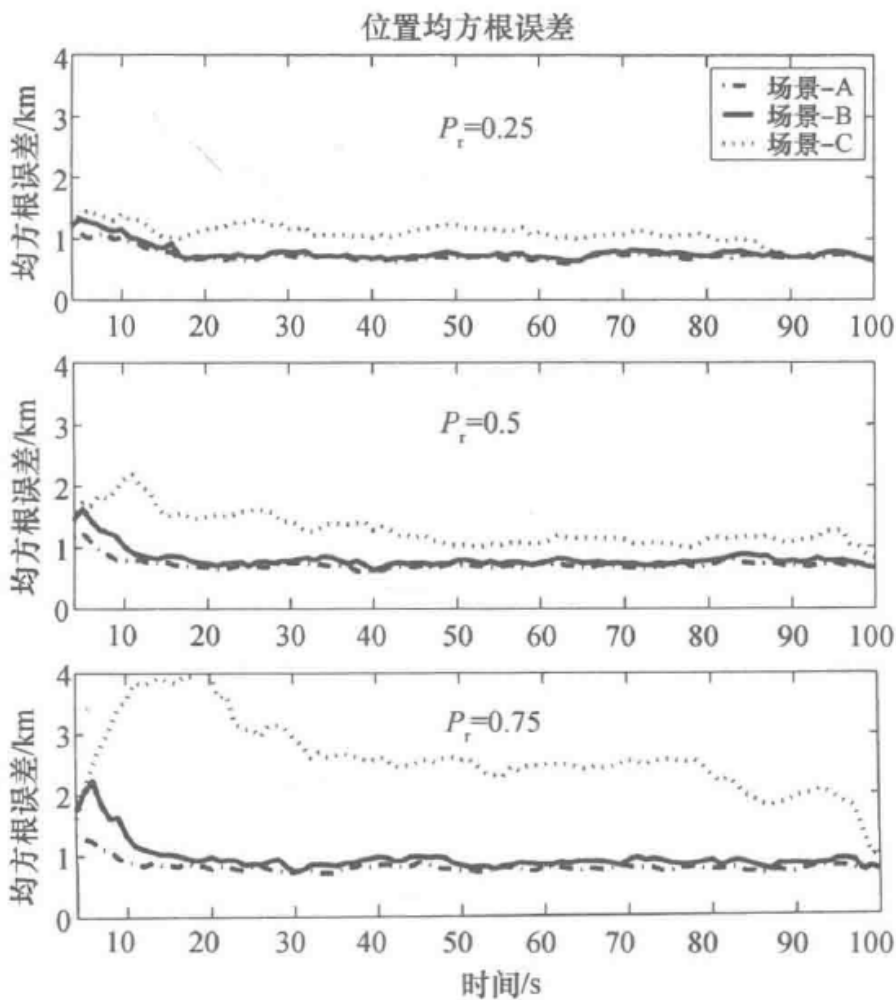


图 8.9 AS - PDA 的 RMS 性能

杂波环境跟踪的统计性能如表 8.2 所列,可以看出,从平均期望预选观测的个数 \bar{m} 和航迹丢失指标上看,使用 OOSM 的 AS-PDA 性能与标准 PDA 十分接近。当航迹有连续 8 次扫描都没有获得观测的更新时,则认为航迹已丢失。实际上,仿真中一条丢失的航迹将导致相当大的 RMS 误差,而不可能跟上实际的目标轨迹。因此,当计算 RMS 误差时,只考虑剩余的航迹。

表 8.2 AS-PDA 性能比较

仿真场景	$P_r = 0.25$		$P_r = 0.5$		$P_r = 0.75$	
	TL	\bar{m}	TL	\bar{m}	TL	\bar{m}
A	16%	2.6256	16%	2.6411	8%	2.8613
B	15%	2.6658	16%	2.6610	8%	2.8860
C	15%	2.1453	17%	1.6879	11%	1.3342
PDA	15%	2.7821	12%	2.8942	10%	2.9509

比较增广状态滤波器的滤波输出和平滑输出是一件很有意思的事情。前者实际上类似于一个常规的状态估计算法(需要少量内存)的输出,而后者是增广状态估计算法最大延迟的输出,很明显这里有 d_{\max} ($d_{\max} = 4T$) 个采样周期的延迟。图 8.10 给出了这种情况下的 RMS 误差的比较,结果可以看出,平滑之后的性能改善非常明显。

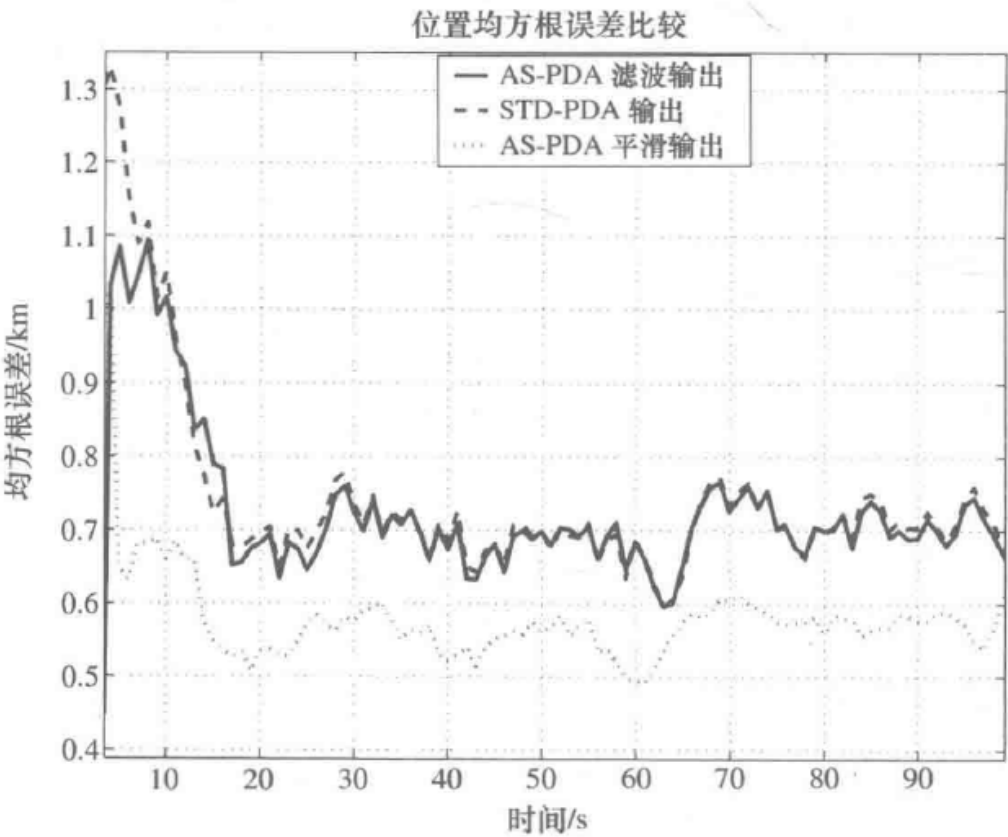


图 8.10 AS-PDA 滤波和平滑状态估计均方根(RMS)误差

为了突出 AS-PDA 算法的性能,没有 OOSM 的标准 PDA 算法的 RMS 性能也在图中进行显示,需要指出的是,AS-PDA 算法的性能与无 OOSM 情况下的标准 PDA 性能非常接近。

8.6 小 结

本章讨论了实时目标跟踪中一个非常实际的问题的解决方案。在大量的传感器通过网络进行互联的系统中,由于种种原因,观测经常在一个延迟的时间到达。因此,在特定的时间获得观测的假设无法得到保证,需要研究如何利用较晚时间到达的观测的问题。本章通过贝叶斯建模给出了这一问题的解决方案,介绍了几个主要的算法——AS - KF、AS - PDA 等,并给出了一些仿真结果。

第9章 实用目标跟踪算法

第1~8章介绍了最优的(和次优的)贝叶斯跟踪递归方法和相关的近似方法。

本章涉及了一些目标跟踪的实际实现过程中的重要知识点。它可以看作一些单独章节的集合,每个部分解决一个特殊的实际问题。尽管本章经常强调目标的存在性,但经过细致研究和谨慎调整,本章介绍的内容也可应用于其他算法,或为其他算法提供基础理论。

9.2节介绍杂波环境下的次优多目标线性跟踪方法。线性多目标方法附加的数值计算复杂度与目标的数量和观测维度的数量成正比。接下来9.3节讲解一些杂波观测密度估计的实际方法。贝叶斯递归方法需要初始化;在缺少先验目标信息的情况下,利用可获取的观测进行航迹初始化。9.4节讨论一些航迹初始化方法以及折中的处理方法。由于种种原因,多条航迹可能终止于同一个观测序列,9.5节介绍的航迹合并过程识别并解决了这一情形。最后,9.6节给出一些(仿真)监视场景及相应的自动目标跟踪解决方案。

9.1 简介

在包含大量目标和密集杂波的复杂情形下,基于最优多目标方法的算法(5.5.4节)由于其过多的计算需求可能是不可行的。将单目标跟踪器转换成多目标跟踪器的线性多目标跟踪方法将在9.2节进行详细讨论。经过测试,大量目标(Mušicki和La Scala,2005^[121])和杂波的情形下,线性多目标方法被证明为一种次优多目标跟踪方法(Mušicki和La Scala,2008^[122])。正如“线性多目标程序”这个名字表明的,它的开销是与跟踪目标的数量和选择的观测数量成正比的。因此,它不受航迹与观测可行分配组合的可能数量的影响。线性多目标跟踪一个附加的优点是它保持了单目标跟踪算法简洁优雅的结构。这意味着(软件)实现简单、程序可靠且维护简单,这些有助于我们拥有一个较好的保底系统。

在第5章中杂波观测密度均假设已知,然而,这在大多数应用中是不正确的,需要用收到的观测对杂波观测密度进行估计。9.3节描述了一些单目标和多目标跟踪算法中估计杂波观测密度的方法。

目标跟踪算法是用贝叶斯方程导出的。贝叶斯递归方程假设初始航迹状态存在。在目标存在和位置先验信息通常未知的情况下,新航迹必须用观测进行初始化。9.4节介绍了一些有用的初始化方法。

航迹是通过观测初始化的,因此,每个目标可能会初始化成多条航迹,如每扫描一次可能初始化一条航迹。另外一种可能是,一条航迹(真或者假)开始跟踪已经被其他航迹跟踪的目标。无论什么原因,总之可能会碰到多条航迹跟踪一个目标的情况。9.5节将介绍一些识别和解决此类情形的方法。

9.6节给出一些展示第5章和第9章介绍的技术和方法有效性的精选实例。

9.2 线性多目标跟踪

当航迹彼此相距较近时,一个或更多观测结果落入多条航迹的确认区域,这时即出现了多目标跟踪问题。5.5.4节介绍的最优多目标跟踪方法受观测-航迹联合分配组合爆炸问题的严重影响,式(5.46)即是一个很好的例证。因此,当航迹(目标)和预选观测的数目增加时,最优多目标跟踪很容易成为计算上不可行的事情。因此,出现了一些减少多目标跟踪计算量需求的次优方法,线性多目标跟踪(Mušicki 和 La Scala, 2008^[122])就是这样一种方法。

线性多目标(LM)跟踪方法是一个将单目标跟踪转移到多目标跟踪中的过程,其运算量与目标及观测数量呈线性关系。此外,转换的开销在大多数情况下是可以忽略的,总共仅仅是处理程序时间需求的百分之二三。到目前为止,只有基于目标存在性的从IPDA到IMM-ITS的算法与线性多目标转换进程进行了组合使用。然而,在给出适当的条件时,其他的单目标跟踪算法也可以被使用。

前缀LM是用来表明线性多目标方法已经被应用,如LMIPDA是一种应用LM进程到IPDA方法的多目标跟踪器。

线性多目标跟踪方法假设所有的观测由具有无限分辨力的传感器产生。换句话说,每个观测只有一个信号源。当一个观测被用来更新一条航迹时,它可能是如下情况中的一种:

- (1) 被该航迹跟踪目标的观测量(检测);
- (2) 杂波观测;
- (3) 被其他航迹跟踪目标的观测量(检测)。

来自并非被当前航迹 τ 跟踪的目标的观测是一种假观测,对于航迹 τ 来说,它实际上是杂波的一部分。这种附加的杂波不是泊松分布,这即是线性多目标跟踪方法的本质:当更新一条航迹时,杂波观测密度可能被来自其他航迹跟踪目标的观测调制。这里用“可能”这个词,是因为其他的目标可能存在也可能不存在,甚至即便它们确实存在,它们的观测也只以一定的检测概率出现。

同前面章节一样,这里用 $p_k^r(i)$ 表示观测 $y_k(i)$ 对航迹 τ 的似然函数,用 P_D^r 和 P_G^r 分别表示航迹 τ 的发现概率和波门概率。

记观测量 $y_k(i)$ 是目标 τ 在 k 时刻检测结果的先验概率为 $P^r(i)$,此概率近似为

$$P^\tau(i) \triangleq p(\theta_k^\tau(i) | Y^{k-1}) \approx p(\chi_k^\tau | Y^{k-1}) P_D^\tau P_G^\tau \frac{p_k^\tau(i)/\rho_k(i)}{\sum_{j=1}^{m_k} p_k^\tau(j)/\rho_k(j)} \quad (9.1)$$

目标 τ 在 k 时间产生一个确认观测的先验概率 $p(\overline{\theta_k^\tau(0)} | Y^{k-1}) = p(\chi_k^\tau | Y^{k-1}) \cdot P_D^\tau P_G^\tau$, 等于目标存在、给定目标存在时被检测、给定目标存在并被检测时被确认的概率。式(9.1)中将该概率按各确认观测相对于航迹 τ 的似然成比例地划分。注意式(9.1)暗示先验检测事件在给出单一(正确的)航迹时是互斥的,不同航迹之间是相互独立的(这是线性多目标近似的基础)。

从严格的数学角度来看,式(9.1)似乎存在一个矛盾。怎么能用当前扫描的观测值计算先验概率? 这只是一种近似,可以部分地解释这个疑问,另一部分则在于如何使用这个表达式。 $P^\tau(i)$ 的值用来更新其他的航迹而不是航迹 τ 本身,这可防止相同数据用一种独立的方式多重使用,或者常说的“数据乱伦”。

概率 $P^\tau(i)$ 对所有的航迹 τ 和所有的观测 i 进行计算。如果航迹 τ 没有选择观测 i , 那么

$$p^\tau(i) = p_k^\tau(i) = 0$$

单目标跟踪算法(如 IPDA 和 ITS)中,目标存在性的后验概率和后验数据关联概率的表达式依赖于比值

$$\frac{P_k^\tau P_G^\tau p_k^\tau(i)}{\rho_k(i)}$$

换句话说,依赖于目标观测密度和杂波观测密度在观测坐标处的比值。

这里考虑航迹 τ 更新,并且专注于观测 $y_k(i)$ 。记 Φ 为不包括航迹 τ 的所有航迹的集合。 $y_k(i)$ 是目标 τ 的检测结果的的事件,现在包括 $y_k(i)$ 不是来自 Φ 中任何一个目标的检测结果的的事件:

$$P_D^\tau P_G^\tau p_k^\tau(i) \xrightarrow{LM} P_D^\tau P_G^\tau p^{0,\Phi}(i) p_k^\tau(i)$$

其中

$$p^{0,\Phi}(i) = \prod_{\phi \in \Phi} (1 - P^\phi(i))$$

表示 $y_k(i)$ 不是 Φ 的任何一个航迹跟踪的任何一个目标检测结果的概率。当更新航迹 τ 时,在 $y_k(i)$ 处总的杂波观测密度定义为不包括目标 τ 的所有信源的观测密度,表达式为

$$\rho_k(i) \xrightarrow{LM} P^{0,\Phi}(i) \rho_k(i) + \sum_{\eta \in \Phi} P^{\eta,\Phi}(i) p_k^\eta(i) = P^{0,\Phi}(i) \Omega^\tau(i)$$

其中:

$P^{0,\Phi}(i) \rho_k(i)$ 是杂波观测密度与 $y_k(i)$ 不是集合 Φ 中任何一个目标检测结果的概率的乘积;

$P^{\eta,\Phi}(i)p_k^\eta(i)$ 对应于观测 $y_k(i)$ 处航迹 η 对总杂波(由航迹 τ 观测的)的贡献;
 $P^{\eta,\Phi}(i)$ 是观测量 $y_k(i)$ 是集合 Φ 中目标 η 检测结果的先验概率,且

$$P^{\eta,\Phi}(i) = P^\eta(i) \prod_{\substack{\phi \in \Phi \\ \phi \neq \eta}} (1 - P^\phi(i)) = P^{0,\Phi}(i) \frac{P^\eta(i)}{1 - P^\eta(i)}$$

和

$$\Omega^\tau(i) \triangleq \rho_k(i) + \sum_{\eta \neq \tau} p_k^\eta(i) \frac{P^\eta(i)}{1 - P^\eta(i)} \quad (9.2)$$

因此, LM 由如下转换过程实现:

$$\frac{P_D^\tau P_G^\tau p_k^\tau(i)}{\rho_k(i)} \xrightarrow{\text{LM}} \frac{P_D^\tau P_G^\tau P^{0,\Phi}(i) p_k^\tau(i)}{P^{0,\Phi}(i) \Omega^\tau(i)} = \frac{P_D^\tau P_G^\tau p_k^\tau(i)}{\Omega^\tau(i)}$$

它等价于在更新航迹 τ 的状态时,将杂波观测密度 $\rho_k(i)$ 简单替换为调制的(关于航迹 τ)杂波观测密度 $\Omega^\tau(i)$ 。在这种环境下, $\Omega^\tau(i)$ 被叫做由航迹 τ 在观测量 $y_k(i)$ 的坐标下观测到的等效 LM 杂波。

概括地说,将 LM 应用于单目标跟踪器包括两个 LM 步骤,在单目标数据关联之前完成:

(1) 对于每条航迹 τ 和它的确认观测,用式(9.1)计算先验概率 $P^\tau(i)$ 。注意对于不被航迹 τ 选中的观测量 j , $P^\tau(j) = p_k^\tau(j) = 0$ 。

(2) 当更新航迹 τ 时,用由式(9.2)计算的 LM 调制杂波观测密度 $\Omega^\tau(i)$ 替换被选定观测的杂波观测密度 $\rho_k(i)$ 。

以另一种方式,LM 可看作一种预测/校正方法。每条航迹的观测分配初始概率在单目标假设下由式(9.1)计算,然后用调制杂波观测密度方程式(9.2)进行校正。

为了阐明 LM 在实际中是怎样工作的,假设两条航迹 τ 和 η ,共享一个观测量 $y_k(i)$ 。进一步假设 η 是一条只选择观测 $y_k(i)$ 的“强大”的航迹,那么 $P_i^\eta \rightarrow 1$ 。当更新航迹 τ 时,调制杂波观测密度 $\Omega^\tau(i) \rightarrow \infty$,于是航迹 τ 会有效地忽略观测 $y_k(i)$,从而得到一个满意的结果。

LM 方法已经应用于单目标单扫描的跟踪器,如 IPDA 和 IMM - IPDA (包括 LMIPDA 和 IMM - LMIPDA) (Mušicki 和 Suvorova, 2008^[125]), 以及单目标多扫描跟踪器,如 ITS 和 IMM - ITS (包括 LMITS 和 IMM - LMITS) (Mušicki 等, 2005a^[132]; Mušicki 和 Evans, 2008, ^[125])。从目前的结果来看,基于 LM 的跟踪器相对于基于最优(联合的)多目标方法的跟踪器的性能损失可以忽略不计,在某些情况甚至没有性能损失。对于单扫描跟踪器(LMIPDA 和 IMM - LMIPDA 对 JIPDA 和 IMM - JIPDA)差异几乎是不可察觉的,并且对于多扫描跟踪器(LMITS 和 IMM - LMITS 对 JITS 和 IMM - JITS)性能差异也是微乎其微。当然,由于组合爆炸问题,“联合”多目标跟踪器在许多情况下是不可实现的,而 LM(或一些其他的次优方法)则是目前发表的仅有的现实可行的方法。

所有额外的 LM 操作,都与航迹和观测的数量呈线性关系(因此其名为线性多目标),稍加仔细的实现,只会增加百分之几的计算需求。LM 已经在大量(机动)目标和密集杂波的情况下进行了成功的测试(Mušicki 和 La Scala,2005^[121])。

给定目标数量和杂波统计值,LM 方法计算需求的峰值-平均比与最优联合多目标方法相比要低得多。如果硬件计算性能必须满足峰值计算需求,那么 LM 方法的优势则是不言而喻的。另外,LM 实现逻辑系统与最优联合多目标方法相比简单得多,例如,不需要进行联合假设的枚举和评估,这使得开发快捷、软件可靠,维护起来也较容易。

9.3 杂波观测密度估计

杂波观测密度估计是一个在杂波环境目标跟踪中常被忽略的问题,然而,正如在 9.6 节中的例子展示的,更好的杂波观测密度知识可以使近乎无用的结果转变成成功的结果。因此,如何强调杂波观测密度知识的重要性都不为过。

下面进行详细讨论,在没有给出杂波观测密度的先验知识(无参数目标跟踪)的情况下,杂波观测密度由确认观测进行在线估计。在这种情况下,波门体积 V_c 的选择至关重要。波门越大,杂波观测密度的估计就越精确,从统计上看,较多的确认杂波观测将会带来更好的杂波观测密度估计。另一方面,如果杂波是不均匀的,波门体积越大,杂波观测密度估计偏差越大,由此带来的害处也就越大。波门大小对杂波观测密度估计的影响远超过包括波门概率在内的其他因素的考虑。

有人可能会建议用两个选择门。一个选择门,通常较小,实际上用来选择观测数据去更新航迹。另外一个选择门通常更大,选择观测数据来估计杂波观测密度。两者的参数能够被独立地调整,来使杂波观测密度估计和用来更新航迹状态的观测数量最优化。但是,本书不对这些考虑展开深入讨论。

不同目标跟踪算法有不同的波门体积,即使给定相同的波门概率 P_c 。波门体积还依赖于先验观测概率密度函数的形状和使用各种近似方法。例如,Mušicki (1994^[115])比较了 IPDA 和 IMM-PDA 的波门体积。只有波门的大小被修正为统计近似,对这些(非参数的)算法公平比较才可以进行。

一般来说,杂波观测密度往往是先验未知的。例如,在热噪声是虚假信号的唯一来源(雷达接收天线指向真空)这种稀少的情况下,可以计算虚警的先验概率进而计算杂波观测密度。然而,这样的或其他相似的情况却很少发生。

如果杂波差不多是平稳的,意味着杂波信号的参数随时间变化缓慢,监视空间的杂波观测密度可以用杂波图(Mušicki 等,2005b^[133])来估计(平均)。在很多情况下这种假设是不可能的。一些例子包括快速移动感应器和快速改变的环境、快速的预热时间等。在这些情况下杂波测绘是不可能的,必须假设没有杂波观测密度的先验信息。这种情况下的跟踪称为无参数目标跟踪,该情形下的杂波观测密度估计即是本节的主题。尽管杂波密度估计是在基于目标存在性的跟踪器(第 5

章)中完成的,同时可能使用了第9章的LM扩展方法,但是这些杂波估计的结果,经过适当修正以后也可以同其他跟踪算法一起使用。

无参目标跟踪方法有一个附加的假设:“在感兴趣的监视区域内杂波观测密度是均匀的。”感兴趣的区域的定义依赖于目标跟踪算法。对于单目标跟踪,感兴趣的区域是航迹的波门区域。对于多目标跟踪,感兴趣的区域则是当前航迹聚类的区域。

无参数跟踪中,杂波观测密度估计在观测选择操作执行和监视区域建立后进行。估计的杂波观测密度为数据关联(5.5.3节和5.5.4节)使用。

对于每条航迹 τ 的每个分量 c_{k-1} 的每个目标模型 σ ,杂波观测密度估计在 k 时刻的输入为:

- (1) 被选定观测的数量 $m_k^\tau(c_{k-1}, \sigma)$;
- (2) 预选波门的体积 $V_k^\tau(c_{k-1}, \sigma)$;
- (3) 目标存在性先验概率 $p(\chi_k^\tau | Y^{k-1})$ 。

k 时刻每个感兴趣区域的杂波观测密度估计的输出是:

在每个观测 $y_k(i)$ 的坐标处的杂波观测密度,在这种情况下,杂波密度对感兴趣区域内的每个观测是相同的,即 $\rho \triangleq \rho_k(i)$ 。

杂波观测密度被估计为

$$\rho = \frac{\hat{m}_k}{V_k} \quad (9.3)$$

式中: \hat{m}_k 是在感兴趣监视区域的杂波观测数量的(统计意义上)估计; V_k 是感兴趣监视区域的体积。

航迹预选门是各分量预选波门的并,每个分量的预选波门又是所有目标模型预选波门的并集。对于单目标跟踪,航迹预选波门是感兴趣的监视区域。对于多目标跟踪,航迹聚类区域是感兴趣的监视区域,它是聚类内各成分航迹波门的并。在这两种情况下,监视区域都归结为是独立航迹的独立分量的独立模型的波门(本节称为“基本波门”)的并。

如5.5.2节中关于观测选择的讨论,每个基本波门在观测空间是一个超椭球。那么监视区域的体积 V_k 是各交叉超椭球的并。据作者所知,对于监视区域的体积还没有一个封闭的表达式。我们使用近似的表示(Mušicki 和 Evans, 2002^[117]; Mušicki 和 Morelande, 2004^[124]),假设体积 V_k 是 H 个交叉超椭球 h 的并,记 $V_k(h)$ 和 $m_k(h)$ 分别为超椭球 h 的体积和其选定观测的数量。那么,预选观测的总数为

$$m_k = \bigcup_h m_k(h) \leq \sum_h m_k(h)$$

而体积的近似值为

$$V_k \approx \max \left(\sum_h V_k(h) \frac{m_k}{\sum_h m_k(h)} \max_h V_k(h) \right) \quad (9.4)$$

这里取最大值的操作确保体积的近似值至少与最大的基本波门体积一样大,而

$$o = \frac{m_k}{\sum_h m_k(h)} \quad (9.5)$$

近似计算重叠比值,该比值定义为重叠超椭球并集的体积与各单超椭球体积之和的比值。被选定观测的数目越大(杂波观测密度的真实性越高),式(9.4)的近似就越准确。然而,Mušicki 和 Evans,2002^[117]以及 Mušicki 和 Morelande,2004^[124]证实甚至在预选观测数目很小时,这个近似方法也有足够好的效果。

为了举例说明,考虑图 5.4 中单航迹聚类的多目标情形,为了方便,这里在图 9.1 中再次描述。这种情况下:

- (1) 聚类中有四个预选观测, $m_k = 4$;
- (2) 每条航迹选择两个观测, $m_k(h) = 2, h = 1, \dots, 3$;
- (3) 重叠因子式(9.5)为 $o = 4/6 = 2/3$;

(4) 假定各基本波门的体积相等, $V_k(1) = V_k(2) = V_k(3)$,聚类区域的体积近约为 $V_k \approx 2V_k(1)$,这是一个合理的近似。

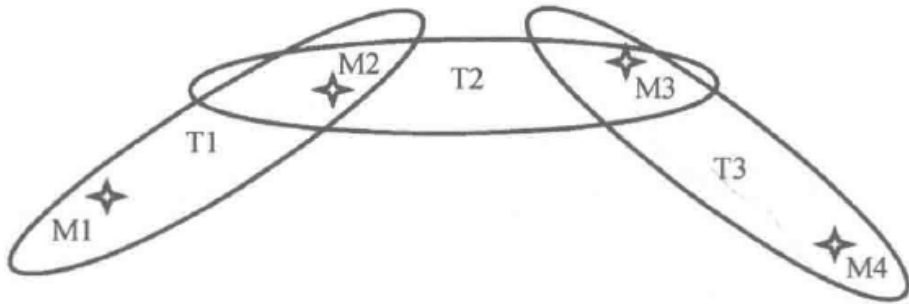


图 9.1 多目标情形

航迹至少选择一个观测的情况下杂波观测密度才是有意义的。因此本节忽略 $m_k = 0$ 的情况,式(9.4)中的分母永不为零。

对于单目标跟踪,式(9.4)变为

$$\begin{aligned} V_k &= V_k^\tau = \bigcup_{\xi_{k-1}^\tau} \bigcup_{\sigma} V_k^\tau(c_{k-1}, \sigma) \\ &\approx \max \left(\sum_{\xi_{k-1}^\tau, \sigma} V_k^\tau(c_{k-1}, \sigma) \frac{m_k^\tau}{\sum_{\xi_{k-1}^\tau, \sigma} m_k^\tau(c_{k-1}, \sigma)}, \max_{c_{k-1}, \sigma} V_k^\tau(c_{k-1}, \sigma) \right) \end{aligned} \quad (9.6)$$

对于多目标跟踪,式(9.4)则变为

$$\begin{aligned} V_k &= \bigcup_{\tau} V_k^\tau = \bigcup_{\tau} \bigcup_{\xi_{k-1}^\tau} \bigcup_{\sigma} V_k^\tau(c_{k-1}, \sigma) \\ &\approx \max \left(\sum_{\tau} \sum_{\xi_{k-1}^\tau, \sigma} V_k^\tau(c_{k-1}, \sigma) \frac{m_k}{\sum_{\tau} \sum_{\xi_{k-1}^\tau, \sigma} m_k^\tau(c_{k-1}, \sigma)}, \max_{\tau, c_{k-1}, \sigma} V_k^\tau(c_{k-1}, \sigma) \right) \end{aligned} \quad (9.7)$$

式中: τ 为考察聚类中的所有航迹。

完成式(9.3)所需的选定杂波观测数目的估计,单目标和多目标跟踪中使用

不同的方法进行计算。

单目标跟踪方法忽略了其他目标的可能,预选观测中的某个观测是目标检测结果的先验概率是

$$P_D P_G P(\chi_k | Y^{k-1}) \quad (9.8)$$

这也是选定目标观测数的统计均值。因此,对于单目标跟踪方法(IPDA^[115,129], IMM-IPDA^[125,127], ITS^[128,132]和 IMM-ITS^[130,131]),有

$$\hat{m}_k = m_k - P_D P_G P(\chi_k | Y^{k-1})$$

多目标跟踪方法(JIPDA^[117,119], IMM-JIPDA^[125], JITS^[120,128]和 IMM-JITS^[120])假设 $y_k(i)$ 不是目标检测的事件,在所有选择 $y_k(i)$ 的航迹之间是相互独立的。 $y_k(i)$ 是航迹 τ 的检测结果的概率近似为(见 9.2 节式(9.1))

$$P_{k,i}^\tau \approx P_D P_G P(\chi_k^\tau | Y^{k-1}) \frac{P_k^\tau(i)}{\sum_j P_k^\tau(j)} \quad (9.9)$$

这里一个观测是航迹 τ 的检测结果的先验概率 $P_D P_G P(\chi_k^\tau | Y^{k-1})$ 在选定的观测之间进行分配,分配概率与各观测的似然成正比。 $y_k(i)$ 不是目标 τ 的检测结果的概率变成 $1 - P_{k,i}^\tau$, $y_k(i)$ 不是任何一个目标的检测结果的概率则为(由于假设/近似的事件独立性)

$$P_{k,i}^0 \approx \prod_{\tau} (1 - P_{k,i}^\tau)$$

预期的杂波观测的总数量等于在监视区域内各独立航迹杂波概率的和:

$$\hat{m}_k = \sum_{j=1}^{m_k} P_{k,j}^0 \approx \sum_{j=1}^{m_k} \prod_{\tau} (1 - P_{k,j}^\tau) \quad (9.10)$$

式(9.9)、式(9.10)由伪函数表示为

$$\hat{m}_k = \text{MTT}_{\text{MK}}(\{p(\chi_k^\tau | Y^{k-1})\}_{\tau}, \{p_k^\tau(i)\}_{\tau,i}) \quad (9.11)$$

对于单航迹的聚类,多目标跟踪方法关于 V_k 和 \hat{m}_k 的公式——式(9.7)和式(9.10)分别恢复为单目标跟踪方法的公式,式(9.6)和式(9.8)。

正如最初发表的,第 5 章详细讨论的一些算法使用了不同的杂波观测密度估计公式,第 5 章注明了其间的差异,本书作者认为,这里给出的杂波密度估计方法在大多数应用中能够获得更好的估计效果。

9.4 航迹初始化

为了启动贝叶斯递推,必须对航迹进行初始化。除了一些人为介入,初始化跟踪的唯一途径是借助于观测值。新的跟踪初始化有时具有一个高科技名字“航迹出生过程”。

航迹初始化甚至比航迹更新还缺少准确的理论,本节进行一些并非详尽的探

讨。从业者需要仔细地评估各种各样的方法,建议进行详细的仿真。选择错误的方法初始化航迹可能导致计算资源耗尽(太多的虚假航迹),或者跟踪性能降低(真实航迹没有初始化或没有及时的初始化)。两种结果都会导致严重的问题。

航迹初始化进程应该在航迹状态更新操作后每个观测时间点 k 执行,此时,存在航迹的观测使用情况已经确定,可用来调整航迹初始化。

k 时刻新航迹初始化过程的输入是(不是所有的输入都应用在所有建议的过程中):

(1) 由传感器在前一时刻 $k-1$ 和当前时刻 k 返回的观测集合 Y_{k-1} 和 Y_k , 此处 Y_{k-1} 和 Y_k 代表传感器返回的所有观测。

(2) Y_{k-1} 和 Y_k 的每个观测量 $Y_{k-1}(j)$ 和 $Y_k(i)$ 不是任何存在航迹跟踪目标检测结果的后验数据关联概率 $P_{k-1|k-1,j}^0$ 和 $P_{k|k,i}^0$

新航迹初始化进程的输出是新航迹(由上标 τ 表示),定义为目标存在的概率 $p(\chi_k^\tau | Y^k)$ 和目标航迹状态概率密度函数 $p(x_k^\tau | \chi_k^\tau, Y^k)$ 。

本节介绍了两种常用的航迹初始化技术。一种称为“单点航迹初始化”,另一种称为“两点差分法”。单点航迹初始化概念简单,只需来自当前扫描时间 k 的观测 Y_k 。然而,由于缺乏新航迹速度的先验知识,导致(与两点差分法比较)在下一个扫描时刻 $k+1$ 产生一个大的波门区域。这在密集杂波背景下是有害的,因为更多的杂波观测将可能被选择。这些多余的杂波观测不仅会增加计算需求,而且会增加估计误差,可能引起真实的航迹丢失它的目标或者产生虚假航迹。两点差分法较为复杂,然而,初始速度信息使最新建立的航迹在下一个扫描时刻得到一个小得多的波门区域,这在密集杂波环境中益处较大。在这两种技术中没有一个真正意义上最优的方法;在不同的环境下,有时一个更好,有时另一个更好。

航迹状态估计向量 x_k 通常包括位置向量 r_k 、速度向量 v_k ,有时包括加速度向量 a_k ,每个向量有 n 个元素,对于二维跟踪, $n=2$,对于三维跟踪, $n=3$ 。省略航迹上标,状态向量可表示为

$$x_k^T = [r_k^T \quad v_k^T \quad a_k^T]$$

于是, k 时刻给定航迹分量 c_k 与目标模型 σ 时,目标轨迹的后验估计定义为

$$\hat{x}_{k|k}(c_k, \sigma) = \begin{bmatrix} \hat{r}_{k|k}(c_k, \sigma) \\ \hat{v}_{k|k}(c_k, \sigma) \\ \hat{a}_{k|k}(c_k, \sigma) \end{bmatrix}$$

和

$$P_{k|k}(c_k, \sigma) = \begin{bmatrix} P_{rrk|k}(c_k, \sigma) & P_{rvk|k}(c_k, \sigma) & P_{rak|k}(c_k, \sigma) \\ P_{rvk|k}(c_k, \sigma) & P_{vvk|k}(c_k, \sigma) & P_{vak|k}(c_k, \sigma) \\ P_{ark|k}(c_k, \sigma) & P_{avk|k}(c_k, \sigma) & P_{aak|k}(c_k, \sigma) \end{bmatrix}$$

如果不考虑加速度, $x_k, \hat{x}_{k|k}(c_k, \sigma)$ 和 $P_{k|k}(c_k, \sigma)$ 中的相应元素将被移除。

9.4.1 单点航迹初始化

顾名思义, k 时刻每个用来进行航迹初始化的观测独立地产生一条新航迹。于是这里集中讨论一个观测 $\mathbf{Y}_k(i)$, 其协方差为 \mathbf{R} 。每个观测都重复单点初始化过程。

基于单个位置观测, 我们无法获得目标的速度和加速度信息。如果目标的最大速度和加速度是 v_{\max} 和 a_{\max} , 适当范围内的目标速度和加速度的均匀分布可以反映这种情况。这里用一个均值为 0、速度协方差为 $v_{\max}^2 \mathbf{I}_n/3$ 、加速度协方差为 $a_{\max}^2 \mathbf{I}_n/3$ 的高斯概率分布函数代替均匀分布:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_{k|k}(c_k, \sigma) = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_k(i) \\ \mathbf{0}_{n,1} \\ \mathbf{0}_{n,1} \end{bmatrix} \\ \mathbf{P}_{k|k}(c_k, \sigma) = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0}_{n,n} & \mathbf{0}_{n,n} \\ \mathbf{0}_{n,n} & v_{\max}^2 \mathbf{I}_n/3 & \mathbf{0}_{n,n} \\ \mathbf{0}_{n,n} & \mathbf{0}_{n,n} & a_{\max}^2 \mathbf{I}_n/3 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (9.12)$$

式中: $\mathbf{0}_{n,m}$ 表示 $n \times m$ 的零矩阵; \mathbf{I}_n 表示 n 维单位矩阵。对于 $n=3$, 当垂直方向上的最大速度和加速度是不同于水平平面上的最大速度和加速度时, 可以对式(9.12)进行显式的修改。应该注意(最初)位置、速度和加速的误差是互不相关的。

新航迹只有一个分量, 相对概率为 $p(c_k | \chi_k, \mathbf{Y}_k(i)) = 1$ 。所有目标模型 σ 具有相同的均值和协方差是由式(9.12)定义的状态估计。后验模型概率 $\mu_{k|k}(c_k, \sigma)$ 可能与它们的预期寿命成比例; 另一个常用的合理初始选择是 $\mu_{k|k}(c_k, \sigma) = 1/M, \sigma = 1, \dots, M$ 。

新航迹的目标存在性的初始概率 $p(\chi_k | \mathbf{Y}_k(i))$, 可以用下式计算:

$$p(\chi_k | \mathbf{Y}_k(i)) = P_{k|k,i}^0 \frac{\rho_t(\mathbf{Y}_k(i))}{\rho(\mathbf{Y}_k(i)) + \rho_t(\mathbf{Y}_k(i))} \quad (9.13)$$

式中: $P_{k|k,i}^0$ 表示观测 $\mathbf{Y}_k(i)$ 不是被存在航迹跟踪的任何一个目标的检测结果的概率; $\rho_t(y)$ 表示在 y 处的新目标空间密度。然而, 在大多数情况下, 新目标密度 $\rho_t(y)$ 是未知的, 并且先验杂波观测密度估计 $\rho(y)$ 也经常是未知的, 或为大误差计算值。因此, 忽略式(9.13)中的第二个因子是合理的。然后目标存在性的初始概率变为

$$p(\chi_k | \mathbf{Y}_k(i)) = P_{k|k,i}^0 P_0 \quad (9.14)$$

式中: P_0 表示对于不存在航迹跟踪目标的检测结果的观测目标存在性初始概率。实际上, P_0 是虚假航迹辨别过程的可调参数。

9.4.2 两点差分法

两点差分法(Bar-Shalom 等, 1990^[13])使用连续扫描的观测初始航迹。可以

用两个不同时刻的观测来初始化目标速度估计,加速度则不行。

这个处理进程对 $k-1$ 时刻的所有观测重复执行,因此专注于由 $k-1$ 时刻观测 $Y_{k-1}(j)$ 初始化的航迹。在下一个扫描时刻 k ,以 $Y_{k-1}(j)$ 为中心建立第 $d=1, \dots, n$ 维边长为

$$2(\Delta T_k \cdot v_{\max} + 2\sqrt{R(d,d)})$$

的矩形波门,这里 ΔT_k 是在时刻 $k-1$ 和 k 之间的时间间隔, $R(d,d)$ 是 R 的第 d 个对角线元素。在这里波门概率是 $P_c \approx 1$ 。 V_k 表示矩形波门的体积, y_k 表示在 k 时刻被矩形波门选定的观测集合。

$$\{Y^{k-1}\} = \{Y_{k-1}(j)\}, \{Y^k\} = \{Y_{k-1}(j), y_k\}$$

新航迹是被观测 $Y_{k-1}(j)$ 和每个被选定的观测 $y_k(i)$, $i=1, \dots, m_k$ 初始化的。新航迹的后验航迹状态估计在给定 $Y_{k-1}(j)$ 和 $y_k(i)$ 后是一个高斯概率密度函数,均值为

$$\hat{x}_{klk}(c_k, \sigma) = \begin{bmatrix} y_k(i) \\ (y_k(i) - Y_{k-1}(j))/\Delta T_k \\ \mathbf{0}_{n,1} \end{bmatrix} \quad (9.15)$$

协方差为

$$P_{klk}(c_k, \sigma) = \begin{bmatrix} R & R/\Delta T_k & \mathbf{0}_{n,n} \\ R/\Delta T_k & 2R/\Delta T_k^2 & \mathbf{0}_{n,n} \\ \mathbf{0}_{n,n} & \mathbf{0}_{n,n} & a_{\max}^2 I_n/3 \end{bmatrix} \quad (9.16)$$

由于 $k-1$ 时刻没有关于目标速率的先验知识,因此 k 时刻的先验观测概率密度函数由均匀分布来描述:

$$p(y | \chi_k | Y^{k-1}) = 1/V_k = p_k(i)$$

对于第一个观测,目标存在的概率由式(9.14)给出:

$$p(\chi_{k-1} | Y^{k-1}) = P_{k-1|k-1}^0 P_0$$

它将按下式进行演化(5.3.1节):

$$p(\chi_k | Y^{k-1}) = \text{TEX}_p[p(\chi_{k-1} | Y^{k-1}), \gamma]$$

目标存在的后验概率 $p(\chi_k | Y^k)$ 和给定目标存在 $\beta_k(i)$, $i=0, \dots, m_k$ 的后验数据关联概率由数据关联操作 (Mušicki 和 Evans, 2004a^[118]) 计算。至于是用单目标还是多目标跟踪方法更新存在航迹,出于计算需求方面的考虑,这里建议使用单目标数据关联(式(5.82)):

$$[p(\chi_k | Y^k), \{\beta_k(i)\}_{i \geq 0}] = \text{STDA}[p(\chi_k | Y^{k-1}), \{p_k(i) P_{klk,i}^0\}_{i > 0}]$$

1. 多扫描跟踪器

多扫描跟踪器保留若干个后验航迹分量,用每个观测 $Y_{k-1}(j)$ 初始化航迹,下一扫描时刻用每个选定的观测量 $y_k(i)$ 初始化一个航迹分量。 k 时刻航迹分量数

等于 $m_k + 1$, 一部分对应每个预选观测 $y_k(i)$, 另一个则对应空观测, $i = 0$ 。

对于每个分量, 所有目标模型 σ 均用同一个状态估计概率密度函数初始化。因此, 分量的初始状态估计概率密度函数与各个目标模型的状态估计概率密度函数相同。

分量 $i = 0$ 的位置概率密度函数仍然(几乎)为均匀分布, 因为它仅由单个观测 $y_{k-1}(j)$ 创建。由于各种实际的原因, 此时把它的概率密度函数转化成均值为

$$\hat{x}_{k|k}(c_k, \sigma) = \begin{bmatrix} Y_{k-1}(j) \\ \mathbf{0}_{n,1} \\ \mathbf{0}_{n,1} \end{bmatrix} \quad (9.17)$$

协方差为

$$P_{k|k}(c_k, \sigma) = \begin{bmatrix} R + (\Delta T_k v_{\max})^2 I_n/3 & \mathbf{0}_{n,n} & \mathbf{0}_{n,n} \\ \mathbf{0}_{n,n} & v_{\max}^2 I_n/3 & \mathbf{0}_{n,n} \\ \mathbf{0}_{n,n} & \mathbf{0}_{n,n} & a_{\max}^2 I_n/3 \end{bmatrix} \quad (9.18)$$

的高斯分布较为有利。

分量 $i > 0$ 的状态估计概率密度函数的均值和协方差分别由式(9.15)和式(9.16)规定。

航迹分量的相对概率在 5.5.5 节给出了计算方法; 利用式(5.90), 后验航迹分量 i 的相对概率等于 $\beta_k(i)$, $i = 0, \dots, m_k$ 。

应用式(5.91), 目标模型 σ 的后验概率等于单扫描初始化 σ 模型概率; 一个常用的合理初始化方法是 $\mu_{k|k}(c_k, \sigma) = 1/M$, $\sigma = 1, \dots, M$; 另一个常用的选择是按模型概率 $\mu_{k|k}(c_k, \sigma)$ 与它们的预期寿命成正比的方式进行初始化。

2. 单扫描跟踪器

单扫描(基于 PDA)的跟踪器原理上将所有后验分量合并为一个分量, 这将完成消除两点差分的优点。这里选择进行航迹分量分裂而不是航迹分量合并, 每个应用观测 $y_k(i > 0)$ 的后验航迹分量被分裂成一条独立的航迹, 这种方法在 Mušicki 和 Evans(2004a^[118])的文章中进行了描述。

在进行了多扫描跟踪器的初始化后, 每个 $i \geq 0$ 的分量变成一条目标存在概率为 $\beta_k(i)p(\chi_k | Y^k)$ 的新的单分量航迹。在大多数情况下与 $i = 0$ 对应的新航迹将被终止。

9.4.3 $P_{k|k,i}^0$ 的计算

$P_{k|k,i}^0$ 是观测 $Y_k(i)$ 不是任何一个被存在航迹跟踪的目标在 k 时刻的检测结果的概率。如果没有存在航迹选择观测 $Y_k(i)$, 那么 $P_{k|k,i}^0 = 1$ 。

1. 单目标跟踪

单目标跟踪对每条航迹进行分别处理。观测 $Y_k(i)$ 不是被航迹 τ 跟踪的目标的检测结果的概率, $P_{k|k,i}^{\tau,0}$ 是目标存在且检测结果为观测 $Y_k(i)$ 的后验概率的补, 即

$$P_{klk,i}^{\tau,0} = 1 - p(\chi_k^\tau | Y^k) \beta_k^\tau(i)$$

单目标跟踪方法假设目标未被检测是独立的,而且

$$P_{klk,i}^0 = \prod_{\tau} P_{klk,i}^{\tau,0} = \prod_{\tau} (1 - p(\chi_k^\tau | Y^k) \beta_k^\tau(i))$$

2. 多目标跟踪

多目标跟踪对一个聚类中的所有航迹进行联合处理。观测 $Y_k(i)$ 到不同航迹的分配是互斥的(而不是上面单目标中的相互独立情形)。这里沿用 5.5.4 节的逻辑,并扩展多目标联合数据关联操作。

记 $\Xi(\tau, i)$ 为分配观测 i 给航迹 τ 的所有可行联合事件的集合;于是集合 $\Xi(0, i)$ 就是不分配观测 $y_k(i)$ 给任何存在航迹的可行联合事件的集合;聚类内没有任何航迹选择观测 $y_k(i)$ 的事件是所有(相互排斥) $\Xi(0, i)$ 中可行联合事件的并集,因此

$$\begin{aligned} P_{klk,i}^0 &= \sum_{\varepsilon \in \Xi(0,i)} p(\varepsilon | Y^k) \\ &= 1 - \sum_{\tau} \sum_{\varepsilon \in \Xi(\tau,i)} p(\varepsilon | Y^k) = 1 - \sum_{\tau} p(\chi_k^\tau, \theta_k^\tau(i) | Y^k) \\ &= 1 - \sum_{\tau} p(\chi_k^\tau | Y^k) \beta_k^\tau(i) \end{aligned}$$

如多目标跟踪中的情形,这里的基本联合事件是互斥的。

9.4.4 新航迹初始化的观测选择

哪个观测应该被用来初始化新的航迹呢?到目前为止,显而易见的答案是使用传感器返回的所有观测。如果观测还被一条(强壮的)存在航迹使用,那么新初始航迹开始于一个很小的目标存在概率并且(很可能)很快被终止。

但事情通常不会这么简单,尽管我们很希望它们如此。

首先考虑单目标情况,每条航迹独立更新。进一步假设监视区域内有一个目标,在每一个目标被检测的扫描时刻,都会有一条新航迹被初始化来跟踪同一个目标。由于新航迹是真实航迹,而每条航迹又是独立进行更新,目标存在概率会快速地增长直到被确认。因此,我们最终会得到许多跟踪同一目标的确认航迹,这是不希望看到的情形,必须采用额外的逻辑来消除它。

再考虑初始化的虚假航迹的数量。在密集杂波背景下,要使用两点差分方法。如果正在使用单扫描(基于 PDA)算法,每次扫描初始化虚假航迹的数量是与杂波观测密度的平方成比例的,也与 v_{\max}^n 成正比。很快会有耗尽计算资源的危险。

这些问题可以通过选择合适的观测进行新航迹的初始化而得到缓解。

下面简单列出了一些人们可能会想到的方法。在实际设计中,它们应该在跟踪预期可能工作的最恶劣的条件(最高的杂波观测密度,目标最大速度 v_{\max} ,最大的目标数量)下进行仿真测试。

一些为新航迹选择观测的可能方法是:

(1) 强制使用所有扫描中的所有观测。

(2) 用除确认航迹的“最邻近观测”和暂时航迹的“最邻近观测”(H. A. P. Blom 和 E. Bloem, 与 D. Mušicki 的私人书信, 2007) 之外的所有观测。航迹 τ 的最邻近观测是指 $\beta_k^{\tau}(i)$ 值最高的观测 $y_k(i)$ 。

(3) 使用除确认航迹的“最邻近观测”之外的所有观测。

(4) 使用除确认航迹的确认观测之外的所有观测。

(5) 使用除存在航迹的确认观测之外的所有观测。

(6) 对于应用于单扫描(基于 PDA 的)跟踪方法中的两点差分法, 使用不被同一条存在航迹选择的所有 $y_{k-1}(j) - y_k(i)$ 观测对。

9.5 航迹合并

多条航迹最终可能跟踪同一个目标。

正如 9.4.4 节所描述的, 在单目标跟踪中一个存在的目标可能在每次扫描中初始一条新航迹, 所有这些航迹都是真实航迹(它们将跟踪目标), 而因此可能会最终得到确认。

在多目标跟踪中相似的情形也会存在。然而, 由于联合数据关联, 最强壮的航迹(通常跟踪目标的第一个初始化的航迹将有最大的目标存在性概率)一般会以最高的概率分配到来自目标的观测。由于观测到航迹的分配是互斥的, 较弱的航迹则会以较小的概率分配到来自目标的观测。这实际上会促使这些较弱的航迹忽略目标观测, 因此, 较弱航迹的目标存在性概率会随时间而减少, 最终迫使虚假航迹剔除过程将它们终止。

然而, 在多目标跟踪中, 多余的航迹会耗尽计算资源。如果对有所航迹均使用最优(“联合”)多目标跟踪方法, 这会是一个极其严重的问题。联合多目标跟踪器的计算需求随着航迹数量呈组合爆炸式增长。多余的航迹会引起有效计算资源的饱和, 即便监视区域内只有很小数量的目标。

还有很多其他的原因导致最终出现多条航迹跟踪同一个目标的情形。一条虚假航迹可能开始跟踪一个已经被一条存在的航迹跟踪的目标, 或者一个真实航迹可能会更改目标开始跟踪一个正被另一条现有航迹跟踪的目标。这些情况会在航迹交叉时发生, 或者由不利的目标检测/杂波观测位置关联而引起。如果多余的航迹比较强壮, 在多目标跟踪中分辨出哪一条航迹应该继续、哪一条应该终止也会花费一些时间。这是对有效计算资源的一种浪费, 更严重的是操作员可能会得到一幅错误的目标态势图。

这显然不是我们想要的, 那么必须做一些事来解决它——使用航迹合并过程。航迹合并包括检测可能跟踪同一个目标的航迹对与合并航迹过程。它可能是计算量惊人的操作, 尤其在上最优目标跟踪方法中。这里从更为实用的角度来探讨。

航迹合并概念上分两部分: 合并检验与(只有当航迹对已经通过了合并检验)

实际的航迹合并。航迹合并检验对每一对航迹进行,如果航迹的数量由 T 表示,航迹对的数量则为 $T(T-1)/2$,这可能是一个很大的数字。实际应用中必须使航迹合并检验尽可能地有效。这里以两条航迹(以上标 τ 和 η 表示)为例进行说明,当然,这个过程必须在每一对航迹上重复执行。

9.5.1 航迹合并检验

最优航迹合并检验应该找出航迹 τ 和 η 的航迹估计后验概率密度函数有多么接近。由于当两个概率密度函数都是高斯混合,因此,可以使用 Kullback - Liebler 距离(相对包络)(Cover 和 Thomas, 2006^[50])这一封闭形式。在实际应用中,由于航迹数目巨大,这将会产生巨大的计算需求。我们推荐仅使用均值 $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$ 和协方差 $\mathbf{P}_{k|k}$ 进行航迹 τ 和 η 的合并检验,这些值是为航迹输出(式(5.93))而计算的。

一个合理的尽管计算量较大的航迹合并检验是

$$(\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{\tau} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{\eta})^T (\mathbf{P}_{k|k}^{\tau} + \mathbf{P}_{k|k}^{\eta})^{-1} (\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{\tau} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{\eta}) < \tau_m$$

式中: τ_m 是一个合理选择的航迹合并检验门限。

这个测试的一个概念上的问题是,特别是由于杂波的存在,航迹最终会有一个大的协方差矩阵,而使得让这条航迹过早地通过合并检验。另外一个担忧是求协方差阵的逆是一个计算量很大的操作,而且需要被执行许多次(每对航迹执行一次)。

出于效率的考虑,航迹合并检验被分为两步:粗糙的航迹合并检验和精确的航迹合并检验。精确的航迹合并检验只有当航迹对通过了粗糙的航迹合并检验才会执行。

快速粗糙的航迹合并检验检测航迹 τ 和 η 估计均值的距离:

$$(\mathbf{H}_x \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{\tau} - \mathbf{H}_x \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{\eta})^T (\mathbf{H}_x \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{\tau} - \mathbf{H}_x \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{\eta}) < R_m^2$$

式中: R_m^2 是最小的间隔值, \mathbf{H}_x 只从 $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$ 中选择位置坐标。这个测试也可以对 $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-s}$ 的速率分量进行。

通过粗糙航迹合并检验的小数量的航迹进行精确航迹合并检验:

$$(\mathbf{H}_m \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{\tau} - \mathbf{H}_m \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{\eta})^T (\mathbf{H}_m \mathbf{P}_m \mathbf{H}_m^T)^{-1} (\mathbf{H}_m \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{\tau} - \mathbf{H}_m \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{\eta}) < \tau_M$$

其中, \mathbf{H}_m 用来选取测试状态,位置和速度经常(是航迹状态的分量)被使用,在大多数应用中加速度的估计由于不够精确不宜用来进行合并检验。使用独立于实际 $\mathbf{P}_{k|k}^{\tau}$ 和 $\mathbf{P}_{k|k}^{\eta}$ 的 \mathbf{P}_m 的值会阻止带有较大协方差矩阵的航迹过早地通过测试,正如上面讨论的。 \mathbf{P}_m 可以是一个事先选择好的值,取决于航迹 τ 和 η 以及传感器之间的平均距离(角度)。使用事先计算好的 $(\mathbf{H}_m \mathbf{P}_m \mathbf{H}_m^T)^{-1}$ 可以进一步提高合并检验的计算效率。

合并门限 τ_M 的选择要在尽早检测需要合并的航迹对和过早地将跟踪两个目标的航迹合并之间进行折中。尽管门限的选择取决于应用背景,但是在其他因素相同的情况下,多目标跟踪的合并门限 τ_M 通常要小于相应的单目标跟踪方法。

这种双层的处理结构,经过合适的修改,也可以用来提高观测选择过程的计算效率。

9.5.2 航迹合并实施

最优航迹合并也是一个计算密集的操作,特别是对于多扫描目标跟踪算法,它的后验航迹状态估计概率密度函数是高斯混合。航迹 τ 和 η 已经通过了航迹合并检验并且假设跟踪同一个目标。通过最近几次扫描,航迹 τ 和 η 被一个几乎完全相同的观测集合更新,因此可以推测它们的估计误差是高度相关的。

如果这是正确的,那么最优合并将不会减小很多估计误差,至少不足以驱使我们不惜使用大量的计算资源。相反,可能选用下面一些替代的方法:

- (1) 只保留一条航迹,其他被终止。
- (2) 如果一个或两条航迹被确认,那么保留的航迹继承确认状态。
- (3) 保留航迹选用合并前航迹的最大目标存在性概率。

一种可能是保留具有较高目标存在性概率的航迹。然而本书作者发现,保留估计误差协方差较小的航迹经会得到更好的结果。

如上所述,“航迹合并”实际上用词失当,因为航迹合并过程实际上更大程度上是一个删除多余航迹的过程。航迹合并是一个理论意义上的操作,而在实际中最优方法往往是不合理的。

9.6 演示实例

这里给出两种情形的仿真研究。它们都被设计用来验证第5章给出的基于目标存在性跟踪算法的虚假航迹剔除性能,而第二种情况还验证了9.2节描述的线性多目标跟踪的性能。

每个仿真实验含有大量的仿真运行,每个仿真运行包含大量的扫描。在每个仿真运行中,目标重复它们的航迹;然而,检测序列、观测噪声抽样和杂波观测是随机的,而且对于每个仿真运行和每个在仿真运行中的每个仿真扫描是独立的。随机数字发生器被初始化,因此在给出的仿真研究中每个仿真算法会得到一个完全相同的观测集合。

在两个例子中,自动目标跟踪被仿真。目标跟踪算法没有关于在监测区域的可能的目标的存在、数量和位置的先验信息。航迹用在9.4节中提出的方法初始化。两点差分程序用来初始化航迹。新航迹的目标存在的第一次扫描概率是由式(9.14)计算的。在初始化后,每条航迹的状态根据仿真的算法更新。

应用在5.1节和图5.1中描述的简单但是有效的虚假航迹辨别进程。在这之后,航迹状态更新。结束的航迹从计算机内存中移除,虚假航迹留下。这样做的目的是仿真连续的监测操作和建立一个虚假航迹的静态场。

虚假航迹辨别进程有三个参数定义:

(1) P_0 表示对于不是被现有航迹跟踪的目标的检测的观测量目标存在的初始概率(式(9.14))。

(2) 航迹确认极限 t_c (5.1 节)。

(3) 航迹终结极限 t_t (5.1 节)。

对于给出的算法和监测情形,虚假航迹辨别性能成为这三个参数的函数。对于每个仿真实验和每个仿真的目标跟踪算法,虚假航迹辨别性能是最优的。最优化的目的是找到虚假航迹辨别参数的集合,它们可以最大化虚假航迹被确认的概率,受到在实验中与所有算法相同的预定义和可接受的虚假航迹统计值的约束。这个算法的例外情况在 9.6.2 节中提到。

虚假航迹统计特性的最优化约束条件是确认一条虚假航迹存在需要扫描的次数。对于实际应用的系统,特别是有人操作的系统,这个数字必须小。每条航迹的确认导致一个虚警,而且太多的虚警会很容易导致操作者不相信结果。在极端的情况中,包括一些防御应用程序,每条确认的虚假航迹会引起一个代价高昂的和不必要的回答。这里希望 1000 次扫描中仅仅有不到一次这样的扫描。这在 9.6.1 节中描述的第一个仿真实验中是可以得到的。然而,在多目标仿真(9.6.2 节)中,这个目标很难得到的。在多目标研究中,确认的虚假航迹多半是由“交叉授粉”的不同目标初始化和维持的。这些确认的虚假航迹是与大量的确认的真实航迹一起出现的。因此,有时仍然是不需要的,这些确认的虚假航迹不会自己引起普通的虚警,而且确认虚假航迹的约束条件会在某种程度上放宽。综上所述,必须推断来自应用程序的目标跟踪要求并且避免由于过于设计跟踪器而引起的不必要的误差。

也请注意每条确认的虚假航迹在经过虚假航迹辨别程序自动终结前会存在大量的扫描。因此,确认的虚假航迹的总数量是一个比约束条件更小的数量级。

真实航迹的统计值在单目标跟踪的比较中会被最优化,是真实航迹得到确认时扫描的总数量。对于多目标跟踪比较,这个统计值等于相应的真实航迹得到确认时穿过目标的扫描的总数。

在 Mušicki 和 Suvorova(2004^[124])的文章中,最优化虚假航迹辨别性能是不容易的。开始时,虚假航迹识别作为三个参数的函数存在很多峰值,在峰值处最优化处理进程可能会过早结束。而且,获得虚假航迹辨别性能的唯一方法是通过一个漫长的仿真过程。

在所有的仿真实验中,航迹合并也用来移除多余的航迹。实际的航迹合并过程,如在 9.5 节介绍的,已经被实现。

两个仿真研究都假设是在二维监测区域中进行的。在两个仿真中线性传感器被假设。目标观测量包含的目标笛卡儿坐标,被相互独立的 0 均值、协方差矩阵为 $R = 25 I_2 m^2$ 的高斯白噪声破坏。目标是由一个固定的一致的检测概率检测的。杂波服从泊松分布。

9.6.1 单目标跟踪仿真研究

在杂波背景下单目标跟踪被设计来讨论论证：

- (1) 使用多扫描目标跟踪产生的优点。
- (2) 完善杂波观测密度知识的重要性。
- (3) 虚假航迹辨别性能在真实航迹确认成功率和虚假航迹确认成功率之间的折中。

在单目标跟踪环境中,我们比较了 IPDA 和 ITS 两种方法,在第 5 章描述的重重要的单目标跟踪器,它的检测概率的范围是, P_d 为 0.7,0.8,0.9。ITS 单元的数量被限制在每条航迹 20。无参和有参算法都包含在这个仿真实验中。

在本节描述的实验中,航迹初始化会使用受最大速度制约的来自连续扫描器的所有观测对,这两个观测都没有被同一个已经存在的航迹选中。后面的约束条件假设不满足约束条件的观测量可能是一个正在被已经存在的航迹跟踪的目标的检测。因此根据这个准则设计,减少了多余航迹的数量。虽然这种逻辑似乎在目标分布稀疏的环境中能正常运行,但是在目标分布稠密的环境中似乎是不可实现的,这种环境中来自相互接近的目标的观测量可以系统地初始化并确认虚假航迹。最大目标速度约束是 $v_{max} = 25\text{m/s}$ 。目标加速度不是目标状态的分量,因此不需要找出最大目标加速度。

图 9.2 是仿真环境。单个目标正在匀速运动,每个仿真循环有 50 次扫描,扫描时间是 1s。目标初始位置在笛卡儿坐标系中是 $[75\text{m} \ 200\text{m}]^T$,初始速度是 $[15\text{m/s} \ 0\text{m/s}]^T$ 。

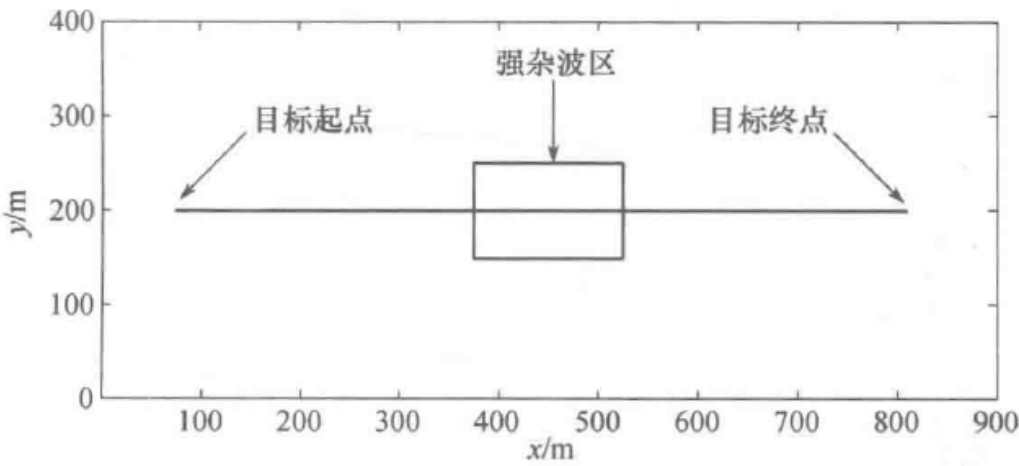


图 9.2 仿真 1 环境

杂波观测密度是不均匀的。杂波观测密度的基数是 10^{-4} ,在图 9.2 中的强杂波区域的杂波观测密度等于 7×10^{-4} 。这是一个很高的杂波观测密度,比较来说,这个密度更适合 ITS 而不是 IPDA。

在每个仿真实验中,每个仿真循环重复 500 次,总共 25000 次扫描。虚假航迹辨别参数经过每个仿真实验大约 25 次扫描会调整而使虚假航迹得到确认。当在有确认的虚假航迹统计值的实验之间只存在微小差异时这个调整过程会结束。因

为虚假航迹的统计值很小,应该带着怀疑的态度看待仿真结果。增加仿真结果的可信度的唯一方法是尽可能地增加每个仿真实验的仿真循环的次数,尽管这将导致一些资源的浪费。然而,尽管仿真结果会并且应该被严格地检查,但是算法之间的性能差异是那么大以至于相信由本仿真实验得出的相对算法排名是安全的,至少对于本仿真是这样的。

虚假航迹统计值是每 1000 次扫描得到确认,这 1/4000 的近似虚假航迹确认率。这也应该与初始化的虚假航迹数量比较,大约 450000,或者每次扫描 18。同时由于没有确认大多数的虚假航迹会被结束。

即使在 $P_D = 0.9$ 的情况中,无参 IPDA 确认真实航迹的成功率会得到一些预期得到的东西。额外的实验已经被执行在带有大约 60 次扫描的虚假航迹统计值的无参 IPDA 中,每次扫描确认一条虚假航迹。

真航迹确认的成功率如图 9.3、图 9.4、图 9.5 所示,分别对应 $P_D = 0.9$ 、 $P_D = 0.8$ 、 $P_D = 0.7$ 的情况。

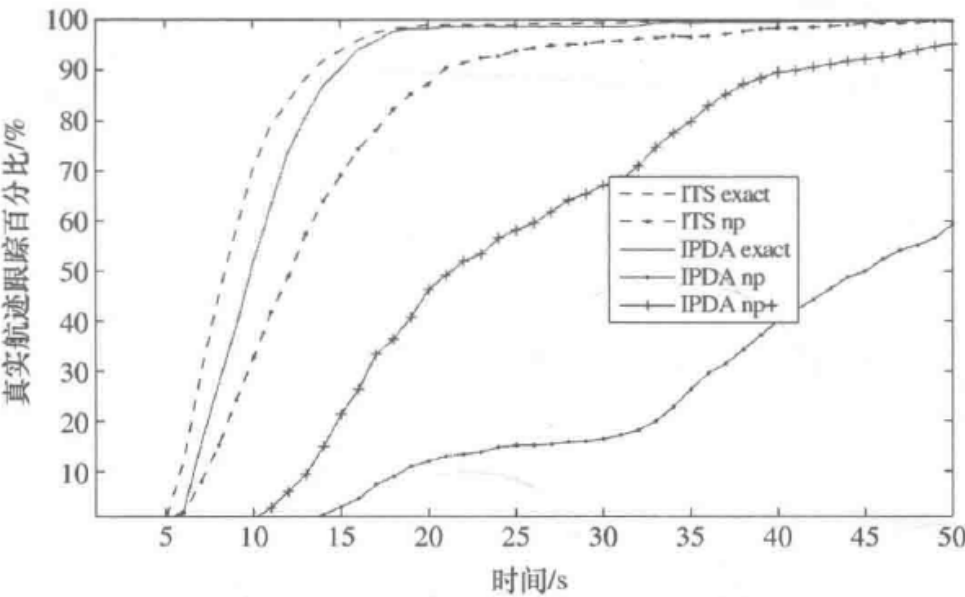


图 9.3 真实航迹成功确认率, $P_D = 0.9$

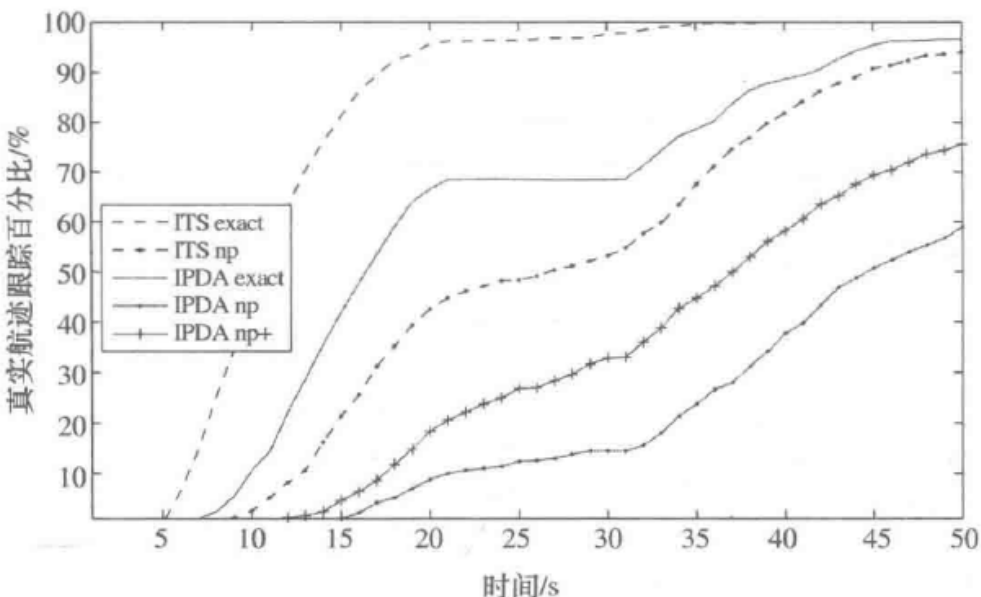


图 9.4 真实航迹成功确认率, $P_D = 0.8$

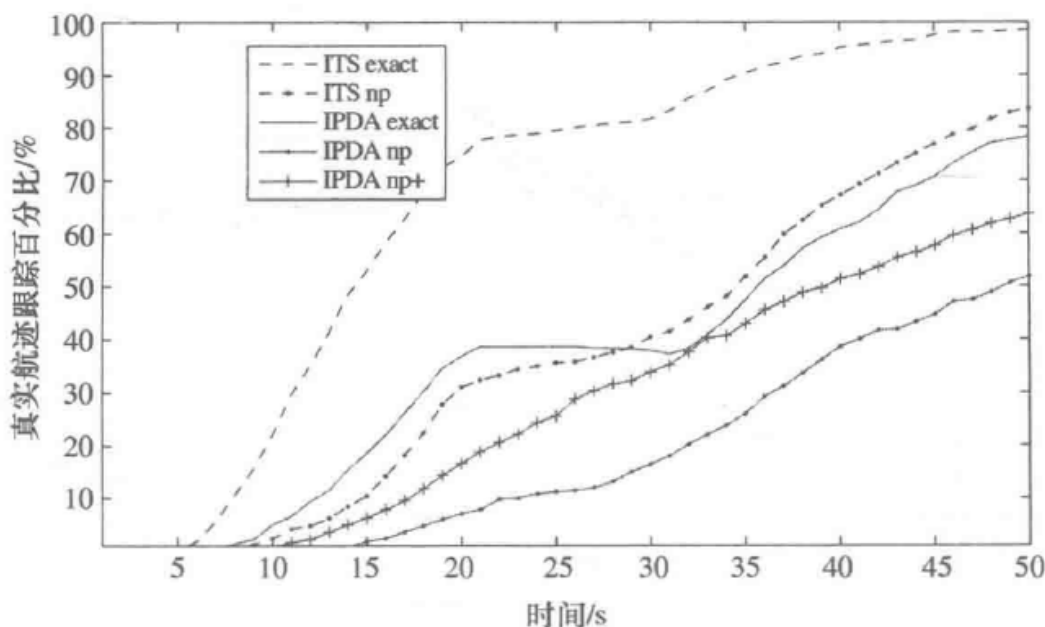


图 9.5 真实航迹成功确认率, $P_D = 0.7$

(1) 曲线“ITS exact”和“IPDA exact”分别对应参数化的 ITS 和 IPDA 算法, 它们都使用了杂波观测密度的理想的先验知识。

(2) 曲线“ITS np”和“IPDA np”分别对应无参的 ITS 和 IPDA 算法, 这里的杂波观测密度是基于当前扫描的选定的观测量而估计得到。

(3) 曲线“IPDA np+”对应无参的受增加的确认的虚假数量约束的 IPDA。

首先, 注意到杂波观测密度信息的重要性。对于 $P_D = 0.9$ 和 $P_D = 0.8$ 的情况, 杂波观测密度的知识比使用多个单元更加重要; “IPDA exact”比“ITS np”拥有更好的效果。只有在 $P_D = 0.7$ 时, “IPDA exact”的性能才比“ITS np”的差。在所有的情形中, 同种算法从“np”到“exact”的实现, 算法的性能有一个实质的提升。

其次, 注意到 IPDA 的性能的恶化比 ITS 更快。实际上, 在这样的环境中, IPDA 似乎应该应用到 $P_D < 0.8$ 的情形中。

最后, 通过比较曲线“IPDA np”和“IPDA np+”, 可以观察到虚假航迹移除性能和真航迹确认性能的折中。通过确认更多的假航迹, 真航迹的确认性能有了显著的提升。系统设计者应该允许一定的确认假航迹的比率, 这依赖于系统的应用程序和总体的要求。降低确认假航迹的平均比也将会对真航迹的确认成功率有一个不利的影响。不利影响的程度是由仿真环境决定的。在这个例子中, 增加确认假航迹的统计值将会改善无参 IPDA 的性能, 和 $P_D = 0.9$ 时的结果达到满意的程度; 然而, 对于 $P_D \leq 0.8$ 的改善效果是不足够的。

对于值很低的 P_D , ITS 通过增加航迹单元的数量来提供更强大的调节能力。一个人也可以用很多种航迹初始化方法进一步完善实验。

$P_D = 0.9, P_D = 0.8, P_D = 0.7$ 时均方根位置估计误差如图 9.6 ~ 图 9.8 所示。对于一个给定的 P_D , 估计误差在算法间某种程度上是没有差异的。估计误差, 正如所希望的, 对于越小的 P_D 值变得越大。

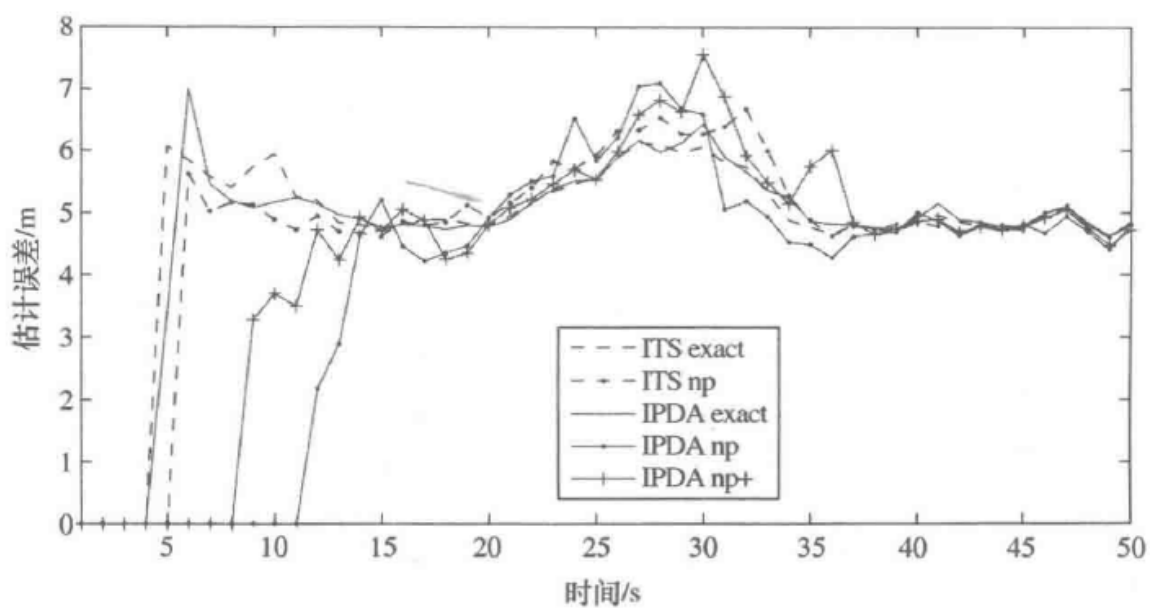


图 9.6 均方根(RMS)误差, $P_d = 0.9$

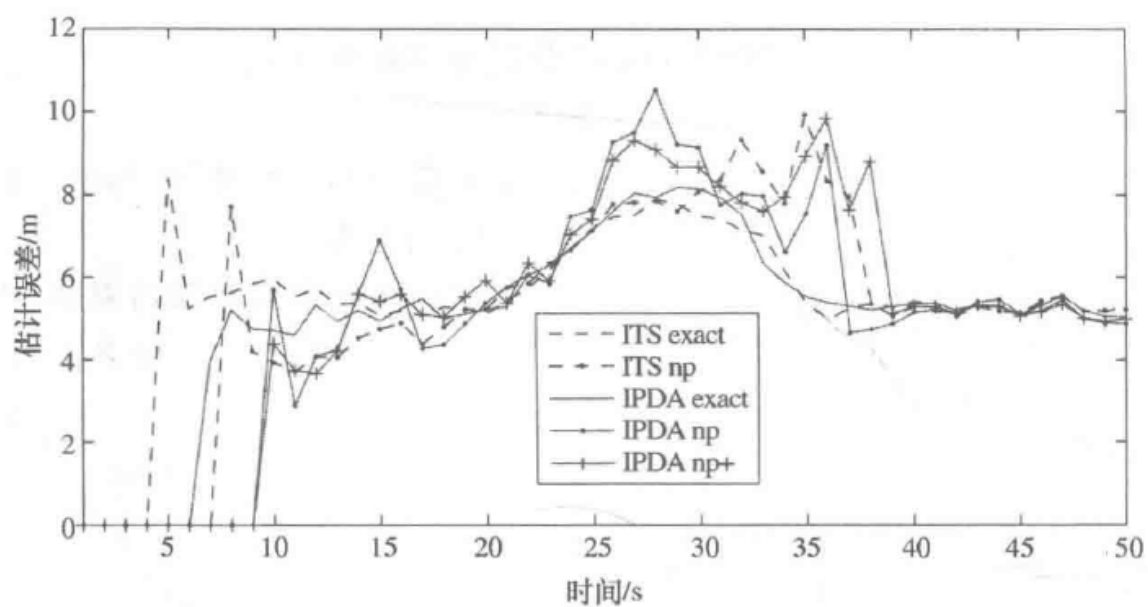


图 9.7 均方根(RMS)误差, $P_d = 0.8$

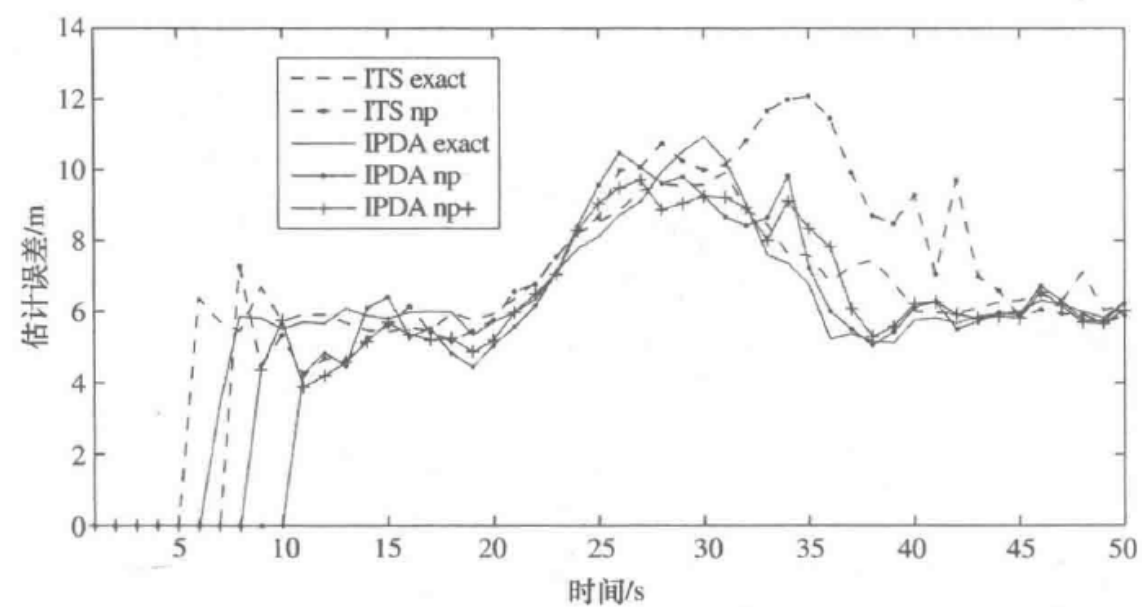


图 9.8 均方根(RMS)误差, $P_d = 0.7$

9.6.2 多目标跟踪仿真研究

在杂波背景下的仿真研究的多目标跟踪被设计用来展示在多目标环境中的假航迹辨别和航迹保留能力。该情形如图 9.9 所示。

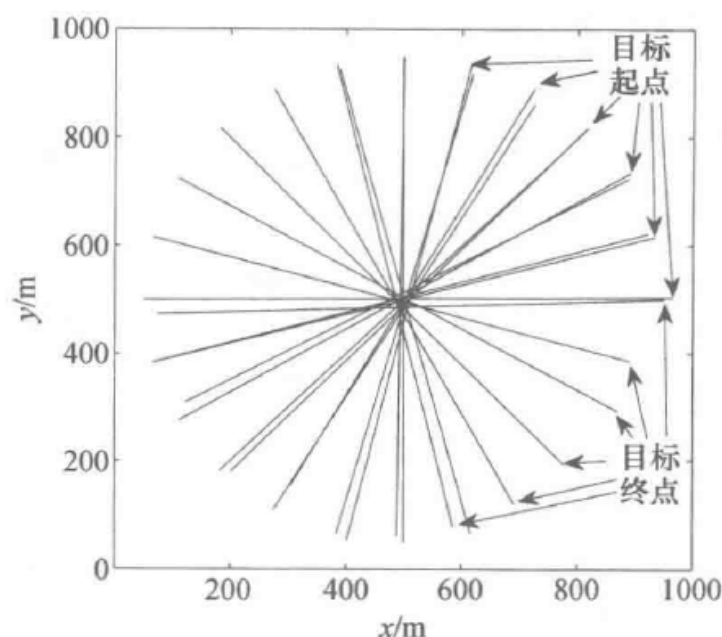


图 9.9 仿真环境 2

图 9.9 仿真了拥有航迹交叉且数量(20)相当大的目标的多目标情形。这些同时相互邻近的目标的数量阻止了目标的跟踪,用在第 5 章给出“联合”多目标跟踪器。当可行的联合事件的数量变得很大时,问题就会出现在计算资源的需求上。我们的选择是要么在该情形中使用单目标跟踪器,要么使用次优多目标跟踪方法。当目标是非机动的时,比较第 5 章给出的 ITS 和 IPDA 单目标跟踪器,同时也比较它们的次优多目标转化过程(线性多目标方法,9.2 节),即线性多目标 ITS (LMITS)和线性多目标 IPDA(LMIPDA)。

扫描时间固定为 1s。在每次仿真循环中,20 个目标从半径为 450m 的圆的边缘开始其航迹。每个目标都有一个朝向圆心的运动向量(恒定速率向量),计划在 20 次扫描后到达圆心,每条航迹在每次循环中持续 40 个扫描周期。随机分量被加到每个目标的初始速度向量中,确保所有的目标航迹不交叉在同一点,但是有足够进程来形成一个大的航迹簇。

每个目标用检测 $P_d = 0.9$ 的概率来检测。监测区域的强烈杂波用杂波观测密度统一的基数 10^{-4} 表示。所有的目标航迹算法均有已知杂波观测密度值的理想知识。

航迹初始化过程的最大目标速度极限为 30m/s。目标加速度不是目标状态的分量,因此没有目标最大加速度。

在这个仿真环境中,当目标聚集在监测区域的中心时大量的假航迹可以用来来自邻近目标的观测量进行初始化。大量的这样的航迹通过从一个目标到另一个目标的移动的“人行道”得到确认(特别是在单目标跟踪器 IPDA 和 ITS 中)。在这个

实验中,只用那些没有被任何目标选中的观测量初始化新的航迹,大大降低了需要初始化和确认的假航迹的数量。本实验中所有的算法使用在 9.4.2 节中描述的两点差分进程来初始化航迹。尽管有这个预防措施,但是还是大约共有 280000 条假航迹需要初始化,或者说每次扫描大约有 28 条航迹。

在本实验中,跟踪器在假航迹的辨别性能和航迹保留性能方面进行比较。结果被集成在仿真实验上,该实验中每个跟踪器由 250 次仿真循环。假航迹辨别和航迹保留结果如图 9.10 和表 9.1 所示。

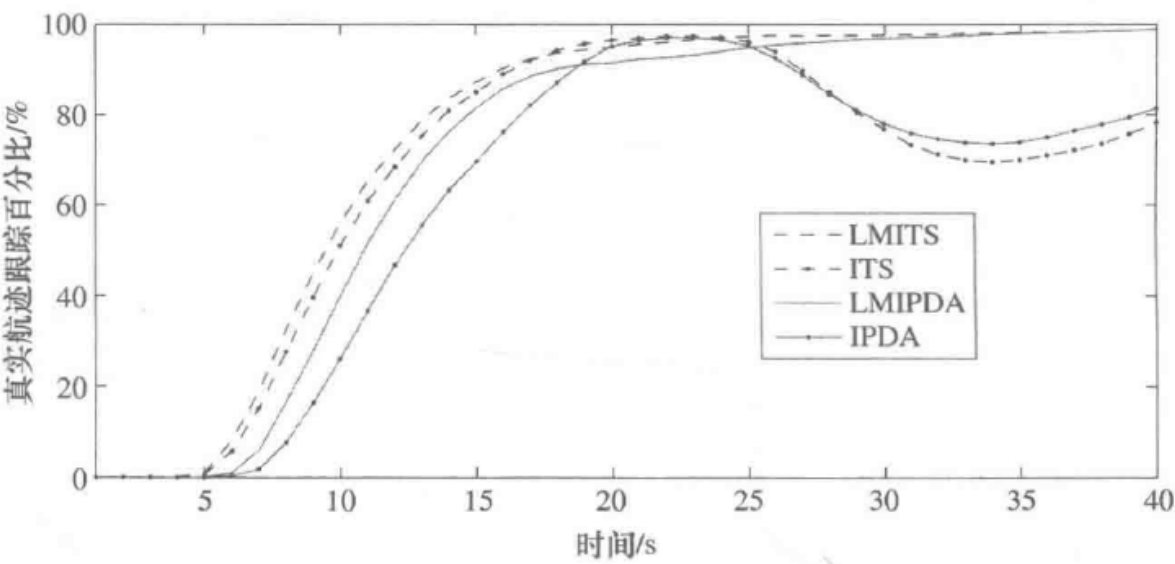


图 9.10 真实航迹成功确认率,仿真环境 2

表 9.1 多目标跟踪算法性能概览

滤波器	确认假航迹数	确认真实航迹数	跟踪维持百分比/%	跟踪切换百分比/%
LMITS	73	4518	97.6	2
LMIPDA	143	4292	97.1	2.7
ITS	294	4450	57	9
IPDA	285	3812	73	5

(1) “CFtStats”: 确认的假航迹的统计值,包含已有确认的假航迹的仿真实验的扫描的次数(总数是 $250 \times 4 = 10000$ 次扫描)。

(2) “nCTtracks”表示在第 16 次扫描确认的真航迹的总数量。理论最大值等于 $20 \times 250 = 5000$ 。对这个数字有影响的每条航迹都会与它的目标一起被记下,在第 39 次扫描会检测这条航迹是否仍然在跟踪最初的目标。

(3) “nOK”表示对“nCTtracks”有影响,在第 39 次扫描后仍然跟踪最初的目标的航迹的百分比。

(4) “nSwitch”表示对“nCTtracks”有影响,在第 39 次扫描后跟踪其他目标的航迹的百分比。

(5) 对“nCTracks”有影响而对“nOK”和“nSwitch”无影响的航迹在第 39 次扫描后由于丢失它们的目标而变为假航迹,而且随后被结束,或者和一些其他明显的航迹合并最终也结束了。

除了在 9.6.1 节中描述的进程,我们不再为近似相等的确定的假航迹统计值努力调试算法。为了得到可靠的航迹保留统计值,假航迹辨别参数已经被调整来产生表 9.1 “nCTracks”列的大量条目。因此,通过比较表 9.1 中的“nCTracks”和“CFtStats”列,可以对假航迹辨别统计值的有效性排序。在这个复杂的多目标环境中,LMITS 有最好的假航迹辨别统计值,其次是 LMIPDA,下一个是 ITS,最后是 IPDA。确定的假航迹统计值应该被每个仿真实验中的初始化的假航迹(大约 280000)的总数和扫描数(10000)带入上下文。

查看图 9.10,我们也可以总结出,LMITS 和 LMIPDA 由于目标相互紧邻而没有很严重的问题。换句话说,ITS 和 IPDA 在第 20 次扫描后,确定真航迹的百分比有很严重的降低。这也可以通过表 9.1 来确认,在表 9.1 中 LMITS 和 LMIPDA 大都有完美的航迹保留统计值,而 ITS 和 IPDA 没有。这证明了多目标跟踪是正确的,也证明了线性多目标进程的使用是正确的。

尽管 IPDA 关于假航迹辨别进程比 ITS 有更坏的性能,但是在本实验中它有更好的航迹保留性能。原因是在目标的交叉过程中,不同的 ITS 的航迹分量对应不同的目标,而且不总是最初的目标赢得这场拉力赛。

底线是一个人不应该在多目标情形中使用单目标跟踪算法,特别是当线性多目标方法提供在计算或者算法上开销很小的卓越的多目标跟踪性能时。

最后,这个扫描时间的均方根位置估计误差在图 9.11 中给出。正如期望的,在 LMIPDA 和 LMITS 之间没有统计上明显的差异,而单目标跟踪器有明显的更大的估计误差。这些增长的误差大多是由开始丢失它们各自的目标的航迹的估计误差导致的。在这些航迹最终丢失它们的真实航迹状态前,它们对估计均方根误差有非常明显的影响。

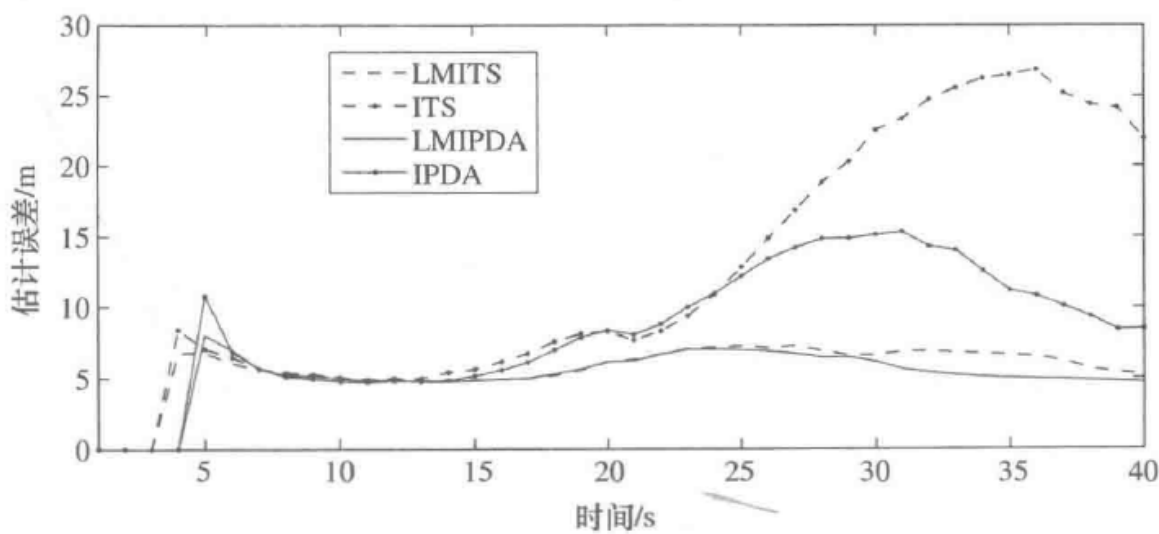


图 9.11 均方根误差,仿真环境 2

9.7 小 结

本章介绍了一些实现各种目标跟踪算法技术上的重要课题,如杂波观测密度估计,航迹初始化与航迹合并。作为提高多目标跟踪算法计算效率的重要手段,本章还介绍了线性多目标跟踪方法。仿真实验演示了不同跟踪器的主要特点。

附录 A 数学和统计学预备知识

A.1 概率法则和分布

A.1.1 样本空间及事件

1. 样本空间

样本空间是一个未知实现的所有可能值或结果的集合,无论是过去、现在还是将来。在贝叶斯概率框架中,任何未知量都可认为是随机量。

例如:

(1) 在三维空间下跟踪目标,目标在某些未来时间点上的位置是不确定的,那么这个三维空间就是一个样本空间。

(2) 当目标过去的正确位置可能不确定,在很多跟踪条件下,目标的正确位置是无法观察到的,而只能估计。在这种情况下,目标过去的正确位置也是随机量,且三维空间是样本空间。

(3) 目标跟踪所使用的量测是传感器的观测结果,它们是随机波动的。量测误差和量测值相关联,这使得量测误差也是一些随机值,重点放在量测误差上,我们认为它们是随机变量。它们的样本空间是不确定的,但常常取量测的值空间。

样本空间是对感兴趣的未知量的所有取值的数学集合。最简单的例子就是掷硬币实验。这时样本空间为 $\{H, T\}$, H 表示正面, T 表示反面。

2. 随机事件

一个事件是样本空间的子集,任何一个属于样本空间的取值集合都是与之相对应的时间的数学表示。

例如:

(1) 当目标沿直线运动时,样本空间用 $\Omega = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ 。包含实际直线上的任意区间可表示一个事件。例如,可用区间 $[0, 2]$ 表示目标在1附近取值,也可取事件 $[0.8, 1.2]$ 来更精确地表示。

(2) 在掷硬币的例子中, $E = H$ 表示硬币为正面。

(3) 若考虑掷两枚硬币的情况,样本空间将由 $\{H, H\} \{H, T\} \{T, H\} \{T, T\}$ 构成。 $E = (\{H, H\}, \{H, T\})$ 。

若 E 和 F 是样本空间的事件,则 E 和 F 的并集是 $E \cup F$,它包含了 E 或 F 中的所有结果。

若 E 和 F 是样本空间的事件,则 E 和 F 的交集是 $E \cap F$,它由既属于 E 且属于

F 的结果组成。

例如：

(1) 掷骰子可能得到 1, 2, 3, 4, 5, 6 这几种结果, 这些结果组成了样本空间。我们令 E 代表掷得偶数的事件, 而 F 代表掷得的结果小于 3 的事件, 则 $E \cup F = \{2, 4, 6\} \cup \{1, 2\} = \{1, 2, 4, 6\}$ 。

(2) $E \cap F = \{2\}$ 。

若 $E \cap F$ 为空集 \emptyset , 则 E 和 F 是互斥事件, 记作 $E \cap F = \emptyset$ 。空集 \emptyset 代表着无效事件 \emptyset , 无效事件就是不会发生的、不可能的事件。

例如: 一个沿直线运动的目标不可能同时处于区间 $[1, 3]$ 和 $[7, 12]$, 因为 $[1, 3] \cap [7, 12] = \emptyset$ 。

一组事件 E_1, E_2, \dots, E_n , 若它们两两互斥, 即 $E_i \cap E_j = \emptyset$, 对任意的 (i, j) 成立, 则认为该组事件是互不相容的。

一组事件 E_1, E_2, \dots, E_n 若它们是互不相容的, 且 $E_1 \cup E_2 \cdots \cup E_n = \Omega$, 则该组事件是互不相容的且是完备的。

A.1.2 概率、条件概率和独立

1. 概率

我们使用概率来计量随机事件的可能性, 它是构成概率框架的基础。

若 E 是随机事件, 给定所有的已知信息和历史背景 \mathcal{H} , 为每个事件 E 对应分配一个数 $p(E|\mathcal{H})$, 它满足:

(1) $0 \leq p(E|\mathcal{H}) \leq 1$;

(2) $p(\Omega|\mathcal{H}) = 1$ 。

(3) 对于任意排序的互不相关的事件 E_1, E_2, \dots , 有

$$p\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \mid \mathcal{H}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} p(E_i \mid \mathcal{H})$$

由于概率的使用, 使得可以在概率框架内定量地解决随机事件的问题。通过大量的科学工作和几百年的时间才得到以上三条公理, 概率问题一般都要服从它们。而对这个问题的讨论超出本书的范围, 可以在很多文献资料中找到关于概率知识的定义和解释。作为本书的读者, 了解 $p(E|\mathcal{H})$ 表示在给定直到当前考查时刻的所有已获知识 \mathcal{H} 时, 事件 E 的概率就足够了。

这种概率的方法使得两个人可以用不同的估计方法 $p(E|\mathcal{H})$ 来表示事件的可能性大小, 只要两人所使用的信息 \mathcal{H} 是不同的。

例如:

(1) 两站跟踪同一目标时, 对于目标位置概率的估计可能是不同的。这与两站接收的不同信息, 以及两站工程师在跟踪理论知识的深浅等有关。

(2) 若用作弊的方法来掷硬币, 知道正面的概率, 换句话说, 掷得正面的概率

更高。然后,被欺骗的那个人却仍相信掷硬币是公平的且掷得正面的概率是 $1/2$ 。

这里需要注意的是,将 $p(E|\mathcal{H})$ 写成 $p(E)$ 而省去了 $(\cdot|\mathcal{H})$,这仅仅是为了简便而已。

2. 条件概率

$p(E|F)$ 是 E 在给定 F 下的条件概率,它表示当假定 F 已发生的条件下事件 E 发生的概率:

$$p(E|F) = \frac{p(E \cap F)}{p(F)}$$

注意: F 并不需要真正发生过,仅在简单估计 $p(E)$ 时假设 F 已发生。

例如:

(1) 在掷骰子时,若用事件 E 表示掷得偶数的点数,事件 F 表示掷得的点数小于 3,则 $E \cap F = \{2\}$,算得 $p(E|F) = \frac{p(E \cap F)}{p(F)} = \frac{1/6}{1/3} = 1/2$ 。

(2) 一个更直观例子:从一副有红桃、方块、草花和黑桃的 52 张扑克里抽出一张牌。令事件 $E = \{K, Q, J\}$ 表示抽到 King、Queen 或者 Jack,而事件 F 表示抽到花色为草花的牌,从而

$$p(E|F) = \frac{p(E \cap F)}{p(F)} = \frac{3/52}{1/4} = 3/13$$

结果是很直观的,一共有 13 张花色为草花的扑克,而其中有 3 张 $\{K, Q, J\}$,所以 $p(E) = 12/52 = 3/13$ 。

3. 独立事件

若事件 E, F 满足

$$p(E \cap F) = p(E)p(F)$$

则认为它们相互独立。

同理,若满足以下,也可认为二者独立:

$$p(E|F) = p(E)$$

对此有个很好的解释:不管是知道事件 F 已经发生,还是假设 F 已经发生,都对评价 $p(E)$ 无影响。

例如:

(1) 从 52 张扑克中抽取一张,令事件 $p(E)$ 代表抽到的牌是 King、Queen 或 Jack,令事件 F 表示抽到花色为草花的扑克。在这个例子中,在抽牌之前先去掉方块 ace,则有

$$p(E|F) = \frac{p(E \cap F)}{p(F)} = \frac{3/51}{13/51} = 3/13$$

结果依然是 $3/13$ 。然而 $p(E) = 12/51 > 12/52 = p(E|F)$,这意味着事件 E 和 F 不是相互独立的。很显然,扑克的花色影响着抽到 King、Queen 和 Jack 的概率。

注意:有些时候,在大部分书籍资料中,将 $p(E \cap F)$ 记作 $p(E, F)$,这是大部分教材中的标准记法。

A.1.3 乘法定理

给定两事件 E 和 F ,在给定事件 F 的观测值时事件 E 的条件概率为

$$p(E | F) = \frac{p(E, F)}{p(F)}$$

这等于事件 E 和 F 交的概率 $p(E, F)$,被事件 F 的非条件概率 $p(F)$ 标准化。使用乘法定理两次,就得到贝叶斯公式,记作

$$p(E | F) = \frac{p(F | E)p(E)}{p(F)} \tag{A.1}$$

很多我们感兴趣的目标跟踪参数例如目标数或者目标的状态可以被建模成事件 E ,同时传感器的输出,如雷达回波或者红外成像可被建模成事件 F ,此时,式(A.1)中的贝叶斯公式可用于得到条件概率 $p(E, F)$ 。

A.1.4 全概率公式

在目标跟踪领域中查普曼 - 科尔莫戈罗夫等式显得尤为重要,令 F_1, F_2, \dots, F_n 为一组互不相容的完备事件集,则有

$$p(E) = \sum_{i=1}^n p(E | F_i)p(F_i)$$

该公式也可以认为是上述定理的推广,即推广到在事件集 $\{F_1, F_2, \dots, F_n\}$ 的条件下评估 $p(E)$ 。

利用查普曼 - 科尔莫戈罗夫等式,可以重写贝叶斯公式为

$$p(E | F) = \frac{p(F | E)p(E)}{\sum_{i=1}^n p(F | E_i)p(E_i)}$$

式中: E_1, E_2, \dots, E_n 是一组互不相容的完备事件集。

A.1.5 随机变量

随机变量是一种将事件映射到真实数值的数学函数,例如一个随机变量可以用来将 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 中的数字分配给骰子被掷后朝上的那面。通过这种将真实世界映射在真实数值的方法,就可以利用概率理论来解决真实世界的问题。

一个随机变量 X 将样本空间 Ω 与实际直线映射:

$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$X(\Omega)$ 是离散/连续的取决于函数 X 是连续的或者离散的,或者是二者的混合,而随机变量 X 可以是离散随机变量或者连续随机变量。

值得注意的是,经常将随机变量这个术语用于 X 的像而非 X 本身。在掷硬币

的例子中,若令 $X(\text{正}) = 0, X(\text{反}) = 1$, 则称集合 $\{0, 1\}$ 为随机变量, 这是一种简便的描述方法。

A.1.6 离散随机变量

在目标跟踪时, 对分辨一个目标更感兴趣, 例如, 这个目标可以是商业航班、侦查直升机、友军的喷气式战斗机, 或者敌方的战斗机。分别将目标在 k 时刻的状态 S_k 用 1、2、3 和 4 表示, 这样 S_k 就成了一个离散随机变量, 且在集合 $\{1, 2, 3, 4\}$ 中取值。取 $p(S_k = i), i = 1, 2, 3, 4$ 分别表示目标是商业航班、侦查直升机、友军喷气式战斗机和敌方战斗机的概率。这四个数值构成了离散随机变量 S_k 概率分布, 在不会造成歧义时, 经常将这个分布记作 $p(S_k)$ 。

A.1.7 连续随机变量

类似地, 也会对确定目标的位置感兴趣, S_k 可以作为目标的坐标。在一维空间的情形下, S_k 取实线上的值。在高维度情况下, S_k 是一个向量, 在 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 或者 \mathbb{R}^3 中取值。

当目标的状态不仅包括位置信息, 还有速率时, S_k 是一个在 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 中取值的向量, n 是目标所处空间的维度。也可以为向量 S_k 增加加速度向量等。

由于 S_k 是连续的, 记 $p(S_k = x)$ 为 S_k 在时刻 x 的概率密度(pdf), 令 f 为非负函数则有

$$\int_A f(x) dx = p(S_k \in A)$$

式中: A 是样本空间的补集; \int 可以表示多重积分, 如果需要的话。在这个例子中, f 是 S_k 的概率密度函数, 在本书中, 常将 f 记作 $p(S_k = x)$ 。

A.1.8 期望值

期望值的概念先于概率出现, Christian Huygens (1629—1695) 在 1657 年写了一本书, 它包含了第一部关于数学均值的研究。由于机会游戏的固有吸引, 概率理论的第一个问题通过数学均值的概念解决。

在概率理论下, 随机变量 X 的数学期望 $E(X)$ 是实验中每个可能结果出现的概率与该结果相应的随机变量值的乘积, 然后所有乘积求和所得的结果

$$E(X) = \sum_{\text{all } x} xp(X = x)$$

连续随机变量时, 和改成积分形式

$$E(X) = \int_x xf(x) dx$$

关于 X 的任意函数都能类似地定义期望值, 如 $g(x)$:

$$E(g(X)) = \int_x g(x)f(x) dx$$

可以查阅 Hogg 和 Craig 在 1995 年的专著^[71], 其中对这个问题有全面的分析。

在本书的数学推导中, 在任何不存在歧义的时候, 用 $E(\cdot)$ 表示 (\cdot) 的数学期望。

A.1.9 联合, 边缘以及条件分布

离散随机变量 X_1, X_2, \dots, X_n 联合概率分布用 $p(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 表示, 它代表对于所有可能值 (x_1, x_2, \dots, x_n) 的多变量函数 $p(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n)$ 。

在连续随机变量条件下, $p(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 还可以用来表示联合概率密度函数, 也可以用于部分随机变量是离散的、部分是连续的情况。这种写法是为了数学推导的简便, 省去冗长的内容, 看起来更明确, 这是在概率统计工作中很常见的操作。为了获得关于联合概率和概率密度函数更详尽的解释, 可以参阅文献[71]。

离散随机变量 X_1, X_2, \dots, X_n 中的 X_i 的边缘概率分布为

$$p(X_i) = \sum_{\text{all } X_1} \cdots \sum_{\text{all } X_{i-1}} \sum_{\text{all } X_{i+1}} \cdots \sum_{\text{all } X_n} p(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

将除 X_i 以外的所有随机变量从联合概率分布中平均掉以获得 X_i 的边缘概率分布, 连续变量的情况, 需要通过相似的平均化过程整合。

对于两个离散随机变量 X_i 和 X_j , 记 $p(X_i | X_j)$ 为 X_i 在给定 X_j 条件下的条件概率分布, 这是对于所有 (x_i, x_j) 事件 $(X_i = x_i | X_j = x_j)$ 的概率分布, 如前所述:

$$p(X_i = x_i | X_j = x_j) = \frac{p(X_i = x_i, X_j = x_j)}{p(X_j = x_j)}$$

对于两个连续随机变量 X_i 和 X_j , 也记 $p(X_i | X_j)$ 为 X_i 在给定 X_j 条件下的条件概率密度函数, 定义如下:

$$p(X_i | X_j) = \frac{p(X_i, X_j)}{p(X_j)}$$

A.1.10 贝叶斯公式和查普曼 - 科尔莫戈罗夫等式

1. 贝叶斯公式

两个连续随机变量 X_i 和 X_j 时的贝叶斯公式为

$$p(X_i | X_j) = \frac{p(X_j | X_i)p(X_i)}{p(X_j)}$$

这是对条件概率定义式的两次使用得到的, 该式适用于所有情形, 两个随机变量都是连续的, 或者都是离散的, 或者一个连续、另一个离散, 都适用。

在目标跟踪时, 我们关心的是在知道所有量测数据向量 $y^k = (y_1, \dots, y_{k-1}, y_k)$ 后估计目标状态 S_k 。要寻求概率分布或者概率密度函数:

$$p(S_k | y^k)$$

这是一个条件分布,且常常利用贝叶斯公式来推导

$$p(S^k | y^k) = \frac{p(y^k | S^k)p(S^k)}{p(y^k)}$$

在一组随机变量中使用同样的公式,则有

$$p(S_k | r_k, y^k) = \frac{p(y^k | S_k, r_k)}{p(y^k | r_k)} p(S_k | r_k)$$

其中, r_k 不需要马上知道,换句话说, r_k 往往是已知的。

一些时候,有必要把随机变量的值写得很确切,正如在 3.2.2 节中的 r_k 一样:

$$\begin{aligned} p(x_k | r_k = i, y^k) &= p(x_k | r_k = i, y_k, y^{k-1}) \\ &= \frac{p(y_k | x_k, r_k = i, y^{k-1})}{p(y_k | r_k = i, y^{k-1})} p(x_k | r_k = i, y^{k-1}) \end{aligned}$$

此时,当目标被观察到, $r_k = i$ 时,意味着随机变量的值为 y^{k-1} 。

对概率论和统计的知识很熟悉的读者则不难掌握这些记法,其他读者则需要复习一下贝叶斯概率模型,然后,会发现很容易把握这些记法。从 Dennis V. Lindley 关于贝叶斯统计(1972^[96])那本书起,可以发现 Box 和 Tiao(1973^[33]), Bernardo 和 Smith(1994^[19]), Berger(1985^[17]), Berry(1996^[20]), Gelman 等(1995^[58]), 以及其他人的关于这方面的一系列优秀专著。

2. 查普曼 - 科尔莫戈罗夫等式

全概率公式可写成

$$p(X) = \int_Y p(X, Y) dY$$

这里积分取 Y 的整个范围, \int_Y 可以表示多重积分、求和或者二者的混合,取决于 Y 的性质,上式还能写成

$$p(X) = \int_Y p(X | Y) p(Y) dY \quad (\text{A. 2})$$

上式常被称为查普曼 - 科尔莫戈罗夫等式。

在目标跟踪里,许多算法计算或者寻求近似的条件密度为

$$p(S_k | y^k) = \frac{1}{p(y_k | y^{k-1})} p(y_k | S_k) \int_{S_{k-1}} p(S_k | S_{k-1}) p(S_{k-1} | y^{k-1}) dS_{k-1}$$

积分

$$\int_{S_{k-1}} p(S_k | S_{k-1}) p(S_{k-1} | y^{k-1}) dS_{k-1}$$

就是该问题中的查普曼 - 科尔莫戈罗夫等式,其中, S_k 就是式(A. 2)中的 X , (S_{k-1} ,

y^{k-1})就是其中的 Y ,注意到式子的简化,这里

$$p(S_k | S_{k-1} | y^{k-1}) = p(S_k | S_{k-1})$$

A.2 马尔可夫链

马尔可夫链是一类具有马尔可夫性质的时间离散的概率模型,在这种模型下,知道当前的状态信息就能预测未来的状态。

马尔可夫链在现实生活中有着广泛的应用。马尔可夫链可以描绘时间离散的系统,这个系统可以处于多种状态。下一时刻,系统会从当前状态变成不同的状态,包括当前状态,这种状态的改变称为转移。马尔可夫性质指的是系统下一时刻的状态仅与当前状态有关,而与过去的状态无关。

令 $\{r_k\}_{i=0}^{\infty}$ 为一组随时间 i 变化的随机变量序列 ($i=0,1,2,\dots$)。 $\{r_k\}_{i=0}^{\infty}$ 是一个随机过程,其中 $r_i, i=0,1,2,\dots$ 表示随机量在时刻 i 的值。例如,在机动目标跟踪时(见第3章), r_k 代表目标动态模型的类型,换句话说,就是目标的动态模型受时间 k 的影响。假定在对 r_i 可取值进行重新排序和标记后, r_i 可取 $\{1,2,\dots,d\}$ 中的值,这些值称为 r_i 的状态。

若

$$p(r_k = i | r_{k-1} = j, r_{k-2} = j_{k-2}, \dots, r_1 = j_1) = p(r_k = i | r_{k-1} = j) = \Gamma_{ij}$$

则 $\{r_k\}_{i=0}^{\infty}$ 称为马尔可夫链,对于所有 $k \geq 1$ 。条件概率 Γ_{ij} 称为转移概率。3.2.1 节中已介绍过目标动态模型。

转移矩阵 $\Gamma = [\Gamma_{ij}]$ 具有马尔可夫链的性质,和初始条件一起,随机过程可以完全确定:

$$\begin{aligned} p(r_k = i) &= \sum_{j=1}^d p(r_k = i | r_{k-1} = j) p(r_{k-1} = j) \\ &= \sum_{j=1}^d \Gamma_{ij} p(r_{k-1} = j) \end{aligned}$$

对于该内容的介绍,可参阅(Ross,2003^[145])。

A.3 δ 函数

冲击函数 $\delta(x)$ 有时也称作狄拉克冲击函数或者脉冲符号,冲击函数可以认为是阶跃函数 $H(x)$ 的微分,即

$$\delta(x) = \frac{dH(x)}{dx}$$

本书使用的冲击函数的性质主要是

$$\int_x f(x) \delta(x - x^0) dx = f(x^0)$$

为了有一个对冲击函数更为直观的理解,可以想象一个函数在除原点以外的地方均为零,而在原点处为无穷大,正如

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

没有其他函数有以上两种性质,而冲击函数可被认为是函数序列的极限,此时以上两个性质重合。

在第 2 章中, δ 函数用于

$$p(x_k | y^k) \approx \sum_{i=1}^n \omega_k^i \delta(x_k - x_k^i)$$

A.4 高斯分布定理

标准高斯分布,对于一个变量,按照均值 μ 和方差 σ^2 定义:

$$N(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \frac{-(x - \mu)^2}{2\sigma^2}$$

n 维向量 x 的高斯分布,可以用它的均值向量 μ 和方差矩阵 P 表示:

$$N(x; \mu, P) = \frac{1}{|P|^{1/2} (2\pi)^{n/2}} \exp \frac{-1}{2} (x - \mu)^T P^{-1} (x - \mu)$$

以下定理是一维结果的特例,许多高斯分布的积构成另一个高斯分布,高斯分布的积分也构成另一个高斯分布。

1. 定理 1

$$\frac{N(x_2; Hx_1, P_2) N(x_1; \mu_1, P_1)}{N(x_2; H\mu_1, P_3)} = N(x_1; \mu, P)$$

其中

$$\begin{aligned} \mu &= \mu_1 + K(x_2 - H\mu_1) \\ P &= P_1 - KHP_1 \\ K &= P_1 H^T (HP_1 H^T + P_2)^{-1} \end{aligned}$$

这些定理的证明方法众所周知,首先在 Ho&Lee, 1964^[69] 出现,后来在很多教材中出现。下面对于查普曼 - 科尔莫戈罗夫公式,在 Challa 和 Koks, 2005^[46] 中给出。

2. 定理 2

$$\int N(x_2; Fx_1, P_2) N(x_1; \mu_1, P_1) dx_1 = N(x_2; \mu, P)$$

其中

$$\begin{aligned} \mu &= F\mu_1 \\ P &= FP_1 F^T + P_2 \end{aligned}$$

附录 B 有限集统计学(FISST)

B.1 引言

有限变化随机集的统计学基于有限集数学。在此附录中,有限集数学将被给出,该附录主要从 Mahler(2004b^[104])的文章中重现。

B.2 目标动态和传感器的随机集模型

目标运动的随机集符号给出如下:

$$\Gamma_{k+1} = \Phi_k(X_k, V_k) \cup B_k(X_k) \quad (\text{B.1})$$

式中: $\Phi(\cdot)$ 为目标动态从时刻 $t=k$ 到 $t=k+1$ 的改变; $B(\cdot)$ 满足多目标情形下的目标增加过程。

类似地,随机集符号的传感器模型给出如下:

$$\Sigma = T(X) \cup C(X) \quad (\text{B.2})$$

式中: $T(\cdot)$ 定义为由目标所得的量测; $C(\cdot)$ 表示由杂波带来的量测。

模型式(B.1)和式(B.2)引出了多目标马尔可夫转移密度和随机变化集总体似然。

B.3 传感器模型的信度质量函数

概率质量 $p(S|x) = \Pr(Z \in S)$ 充分体现了观测集 Z 的统计行为。在随机集域中, Σ 的统计数字以它的信仰质量函数 $\beta(S|X)$ 为特征,信仰函数的计算方法如下:

$$\beta(S|X) = \beta_{\Sigma, \Gamma}(S|X) = \Pr(\Sigma \subseteq S) \quad (\text{B.3})$$

该信仰函数是在任何区域 S 发现的在一个传感器(或者多个传感器)扫描下的所有观测值的全概率,式(B.3)中的信仰质量函数给出了总体似然密度。

B.4 目标运动模型的信度质量函数

概率质量 $p(S|x_k) = \Pr(X_{k+1} \in S)$,它是在之前状态 x_k 条件下在区域 S 中发现目标状态 X_{k+1} 的概率,给出了目标动态的统计算法。对于一个随机变化的有限长集 Γ_{k+1} ,其充分统计量在下式所给的信仰质量函数中体现:

$$\beta_{\Gamma_{k+1}}(S | X_k) = \Pr(\Gamma_{k+1} \subseteq S) \quad (\text{B.4})$$

马尔可夫转移密度通过上式的信仰质量方法计算。

B.5 有限集统计数学的基础

与概率质量不同的是,信仰质量函数是非累加度量。通常,若 $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, 此时的联合概率质量 $p(S_1 \cup S_2 | x) = p(S_1 | x) + p(S_2 | x)$, 而此时的信仰质量为 $\beta(S_1 \cup S_2 | x) \geq p(S_1 | x) + p(S_2 | x)$ 。Mahler, 2004b^[104] 中也记述了信仰概率计算与在确定的抽象拓扑空间, 这个附加性质使从信仰函数中计算密度更为复杂。

通常, 一个确定的随机变化集(随机集在区域 S 中的概率)的信仰质量计算的关系由下式给出:

$$\beta(S | B) = \Pr(A \in S | B) \int_S f(A | B) \delta A \quad (\text{B.5})$$

其中, A 既可以表示目标动态集 Γ_k 也可以表示传感器观测集 Σ 。式(B.5)中的积分指的是密度之和, 或者随机集给出的所有概率的似然性。

B.6 集积分

式(B.5)中的积分服从有限集统计中的“集积分”规则, 一个明确的例子(参阅 Mahler, 2004b^[104])有利于演示“集积分”。

假设对于一个有限集变量 Y 给定函数 $F(Y)$, $F(Y)$ 可以有以下形式:

$$\begin{cases} F(\phi) = \text{概率之 } Y = \phi \\ F(\{y\}) = \text{似然性之 } Y = \{y\} \\ F(\{y_1, y_2\}) = \text{似然性之 } Y = \{y_1, y_2\} \\ \vdots \\ F(\{y_1, y_2, \dots, y_j\}) = \text{似然性之 } Y = \{y_1, y_2, \dots, y_j\} \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

通常, 这里的 $F(Y)$ 可以是似然函数 $F(Z) = f(Z | X)$, 或马尔可夫密度 $F(x) = f_{k+1|k}(X | X_k)$, 且这些形式适用于可能的集合, “集积分”认为

$$\begin{aligned} \int_S F(Y) \delta Y &= F(\phi) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} \int_{\underbrace{S \times \dots \times S}_j} F(\{y_1, y_2, \dots, y_j\}) dy_1 \dots dy_j \\ &= F(\phi) + F_S(1) + F_S(2) + \dots \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

其中

$$F_S(j) = \frac{1}{j!} \int_{\underbrace{S \times \dots \times S}_j} F(\{y_1, y_2, \dots, y_j\}) dy_1 \dots dy_j$$

表示 Y 包含 j 个元素时的全概率。

B.7 集微分

在式(B.5)中,给出了从有限集的密度建立信仰函数方法的步骤。为了从信仰质量函数中建立密度函数或似然函数,需要一个与“集积分”相反的操作,这个操作叫做“集微分”,同时服从有限集统计规则。

若 $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$, 则集微分的定义如下:

$$\begin{aligned}\frac{\delta\beta}{\delta y_j}(S) &= \frac{\delta}{\delta y_j}\beta(S) = \lim_{\lambda E_y} \frac{\beta(S \cup E_y) - \beta(S)}{\lambda(E_y)} \\ \frac{\delta\beta}{\delta Y}(S) &= \frac{\delta^m}{\delta y_1 \cdots \delta y_m}\beta(S) = \frac{\delta}{\delta y_1} \cdots \frac{\delta}{\delta y_m}\beta(S) \\ \frac{\delta\beta}{\delta\phi}(S) &= \beta(S)\end{aligned}$$

B.8 似然函数及马尔可夫密度计算

根据“集微分”和“集积分”规则,信仰质量方法和密度的关系如下:

$$\beta(S) = \int_S \frac{\delta\beta}{\delta X}(\phi) \delta X \quad (\text{B.8})$$

$$F(X) = \left[\frac{\delta}{\delta X} \int_S F(Y) \delta Y \right]_{S=\phi} \quad (\text{B.9})$$

式(B.8)和式(B.9)是在随机集体系中计算多目标似然性和马尔可夫密度的关键。

(1) 真实似然函数 $f(Z|X)$ 如下:

$$f(Z|X) = \frac{\delta\beta}{\delta Z}(\phi|X) \quad (\text{B.10})$$

(2) 真实马尔可夫密度如下:

$$f_{k+1|k}(X_{k+1}|X_k) = \frac{\delta\beta_{k+1|k}}{\delta X_{k+1}}(\phi|X_k) \quad (\text{B.11})$$

根据目标动态模型和传感器模型,在构造出合适集合的信仰概率方法后可以算出密度。在知道似然函数和马尔可夫密度之后,按一般方法贝叶斯递归更新目标状态。

B.9 有限集统计学微积分基本准则

如常微分一样,有限集统计微积分也服从一些准则,以下总结了一些以供参考(详见 Mahler, 2004b^[104])。

B.9.1 加法准则

$$\frac{\delta}{\delta Z} [a_1 \beta_1(S) + a_2 \beta_2(S)] = a_1 \frac{\delta \beta_1}{\delta Z}(S) + a_2 \frac{\delta \beta_2}{\delta Z}(S)$$
$$\int [a_1 F_1(S) + a_2 F_2(S)] \delta Z = a_1 \int F_1(S) \delta Z + a_2 \int F_2(S) \delta Z$$

B.9.2 乘法准则

$$\frac{\delta}{\delta z} [\beta_1(S) \beta_2(S)] = \frac{\delta \beta_1}{\delta z}(S) \beta_2(S) + \beta_1(S) \frac{\delta \beta_2}{\delta z}(S)$$
$$\frac{\delta}{\delta Z} [\beta_1(S) \beta_2(S)] = \sum_{W \subseteq Z} \frac{\delta \beta_1}{\delta W}(S) \frac{\delta \beta_2}{\delta(Z-W)}(S)$$

B.9.3 常数准则

$$\frac{\delta}{\delta Z} K = 0$$

B.9.4 链式准则

$$\frac{\delta}{\delta z} f(\beta(S)) = \frac{df}{dx}(\beta(S)) \frac{\delta \beta}{\delta z}(S)$$
$$\frac{\delta}{\delta z} f(\beta_1(S) \cdots \beta_n(S)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\beta_1(S) \cdots \beta_n(S)) \frac{\delta \beta_i}{\delta z}(S)$$

B.9.5 幂准则

令 $Z = \{z_1, \dots, z_k\}$, n 为非负整数, 令 $p(S)$ 为概率质量函数, $f_p(z)$ 为密度函数, 则有

$$\frac{\delta}{\delta Z} p(S)^n = \begin{cases} \frac{n!}{(n-k)!} p(S)^{n-k} f_p(z_1) \cdots f_p(z_k) & k \leq n \\ 0 & k > n \end{cases}$$

附录 C 目标跟踪中的伪函数

C.1 卡尔曼滤波预测

$$[\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{P}_{k|k-1}] = \text{KF}_P[\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \mathbf{P}_{k-1|k-1}, \mathbf{F}, \mathbf{Q}]$$

按如下定义:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} &= \mathbf{F} \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} \\ \mathbf{P}_{k|k-1} &= \mathbf{F} \mathbf{P}_{k-1|k-1} \mathbf{F}^T + \mathbf{Q}\end{aligned}$$

C.2 测量预测

$$[\hat{\mathbf{y}}_{k|k-1}, \mathbf{S}_k] = \text{MP}[\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{P}_{k|k-1}, \mathbf{H}, \mathbf{R}]$$

测量预测按如下定义:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{y}}_{k|k-1} &= \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \\ \mathbf{S}_k &= \mathbf{H} \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}^T + \mathbf{R}\end{aligned}$$

C.3 卡尔曼滤波估计

$$[\hat{\mathbf{x}}_{k|k}, \mathbf{P}_{k|k}] = \text{KF}_E[\mathbf{y}, \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{P}_{k|k-1}, \mathbf{H}, \mathbf{R}]$$

$$[\hat{\mathbf{y}}_{k|k-1}, \mathbf{S}_k] = \text{MP}[\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{P}_{k|k-1}, \mathbf{H}, \mathbf{R}]$$

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}^T \mathbf{S}_k^{-1}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1})$$

$$\mathbf{P}_{k|k} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}) \mathbf{P}_{k|k-1}$$

式中: \mathbf{I} 表示单位矩阵。

C.4 高斯混合

$$[\hat{\mathbf{x}}_{k|k}, \mathbf{P}_{k|k}] = \text{GMix}[\{\hat{\mathbf{x}}_{k|k}(i), \mathbf{P}_{k|k}(i), \mu_{k|k}(i)\}_i]$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \sum_{i=1}^d \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^i \mu_{k|k}(i)$$

$$P_{k|k} = \sum_{i=1}^d \mu_{k|k}(i) \{ P_{k|k}^i + [\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^i - \hat{\mathbf{x}}_{k|k}] [\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^i - \hat{\mathbf{x}}_{k|k}]^T \}$$

C.5 单目标跟踪的数据关联

$$[p(\chi_k | Y^k), \{\beta_k(i)\}_{i=0}^{m_k}] = \text{ISTDA}[p(\chi_k | Y^{k-1}), \{p_k(i)\}_{i=1}^{m_k}]$$

其中

$$\beta_k(i) \triangleq p(\theta_k(i) | \chi_k, Y^k) = \frac{1}{\Lambda_k} \begin{cases} 1 - P_D P_G & i = 0 \\ P_D P_G \frac{p_k(i)}{\rho_k(i)} & i > 0 \end{cases}$$

$$p(\chi_k | Y^k) = \frac{\Lambda_k p(\chi_k | Y^{k-1})}{1 - (1 - \Lambda_k) p(\chi_k | Y^{k-1})}$$

$$\Lambda_k = 1 - P_D P_G + P_D P_G \sum_{i=1}^{m_k} \frac{p_k(i)}{\rho_k(i)}$$

式中: Λ_k 为时刻 k 的测量似然比。

C.6 多目标跟踪的数据关联

$$[\{p(\chi_k^\tau | Y^k), \{\beta_k^\tau(i)\}_{i \geq 0}\}_\tau] = \text{JMTDA}[\{p(\chi_k^\tau | Y^{k-1}), \{p_k^\tau(i)\}_{i > 0}\}_\tau]$$

$$p(\varepsilon | Y^k) = c_k^{-1} \prod_{\tau \in T_0(\varepsilon)} (1 - P_D^\tau P_G^\tau P \{\chi_k^\tau | Y^{k-1}\}) \times$$

$$\prod_{\tau \in T_1(\varepsilon)} \left(P_D^\tau P_G^\tau P \{\chi_k^\tau | Y^{k-1}\} \frac{p_k^\tau(i(\tau, \varepsilon))}{\rho_k(i(\tau, \varepsilon))} \right)$$

其中, 标准化系数 c_k 利用可能的联合事件是互不相容的, 且这些事件构成完备事件集这一事实来计算

$$\sum_{\varepsilon} p(\varepsilon | Y^k) = 1$$

注意到对一个空集进行乘积运算得 1。

$$p(\theta_k^\tau(0) | Y^k) = \sum_{\varepsilon \in \Xi(\tau, 0)} p(\varepsilon | Y^k)$$

$$p(\chi_k^\tau, \theta_k^\tau(i) | Y^k) = \sum_{\varepsilon \in \Xi(\tau, i)} p(\varepsilon | Y^k)$$

$$p(\chi_k^\tau, \theta_k^\tau(0) | Y^k) = \frac{(1 - P_D^\tau P_G^\tau) p(\chi_k^\tau | Y^{k-1})}{1 - P_D^\tau P_G^\tau p(\chi_k^\tau | Y^{k-1})} p(\theta_k^\tau(0) | Y^k)$$

$$p(\chi_k^\tau | Y^k) = \sum_{i=0}^{m_k} p(\chi_k^\tau, \theta_k^\tau(i) | Y^k)$$

$$\beta_k^r(i) \triangleq p(\theta_k^r(i) | \chi_k^r, Y^k) = \frac{p(\chi_k^r, \theta_k^r(i) | Y^k)}{p(\chi_k^r | Y^k)}, i \geq 0$$

C.7 交互式多模型混合步骤

$$\begin{aligned} & [\{ \mu_{k|k-1}(i), \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^i, \mathbf{P}_{k|k-1}^i \}_i] \\ & = \text{IMM}_{\text{MP}} [\{ \mu_{k-1|k-1}(i), \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}^i, \mathbf{P}_{k-1|k-1}^i, \mathbf{F}_i, \mathbf{Q}_i \}_i, \Gamma] \\ \mu_{k|k-1}(i) & = p(r_k = i | \mathbf{y}^{k-1}) \\ & = \sum_{j=1}^d p(r_k = i | r_{k-1} = j, \mathbf{y}^{k-1}) p(r_{k-1} = j | \mathbf{y}^{k-1}) \\ & = \sum_{j=1}^d \Gamma_{ji} p(r_{k-1} = j | \mathbf{y}^{k-1}) \\ & = \sum_{j=1}^d \Gamma_{ji} \mu_{k-1|k-1}(j) \\ \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^i & = \mathbf{F}_i \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}^{0i} + \mathbf{u}_i \\ \mathbf{P}_{k|k-1}^i & = \mathbf{F}_i \mathbf{P}_{k-1|k-1}^{0i} \mathbf{F}_i^T + \mathbf{Q}_i \end{aligned}$$

参考文献

- [1] Ackerson, G. A. and Fu, K. S. (1970) On state estimation in switching environments, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **15**(1), 10–17.
- [2] Alspach, D. L. and Sorenson, H. W. (1971) Nonlinear Bayesian estimation using Gaussian sum approximations, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **17**(4), 439–448.
- [3] Anderson, B. D. O. and Moore, J. B. (1979) *Optimal Filtering*. New Jersey: Prentice-Hall.
- [4] Bar-Shalom, Y. (1978) Tracking methods in a multitarget environment, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **23**(4), 618–626.
- [5] Bar-Shalom, Y. (2000) Update with out-of-sequence measurements in tracking: exact solution, in *Proc. SPIE: Signal and Data Processing of Small Targets 2000*, O. E. Drummond (ed.), Vol. 4048, pp. 541–556.
- [6] Bar-Shalom, Y. and Birmiwal, K. (1982) Variable dimension filter for maneuvering target tracking, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, **18**(5), 621–629.
- [7] Bar-Shalom, Y. and Fortmann, T. E. (1988) *Tracking and Data Association*. New York: Academic Press.
- [8] Bar-Shalom, Y. and Li, X. R. (1993) *Estimation and Tracking: Principles, Techniques, and Software*. MA: Artech House.
- [9] Bar-Shalom, Y. and Li, X. R. (1995) *Multitarget-Multisensor Tracking: Principles and Techniques*. Storrs, CT: YBS Publishing.
- [10] Bar-Shalom, Y. and Tse, E. (1975) Tracking in a cluttered environment with probabilistic data association, *Automatica*, **11**(5), 451–460.
- [11] Bar-Shalom, Y., Challa, S. and Blom, H. A. P. (2005) IMM estimator versus optimal estimator for hybrid systems, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, **41**(3), 986–991.
- [12] Bar-Shalom, Y., Chang, K. C. and Blom, H. A. P. (1989) Automatic track formation in clutter with a recursive algorithm, in *Proc. 28th Conference on Decision and Control*, Florida, December, pp. 1402–1408.
- [13] Bar-Shalom, Y., Chang, K. C. and Blom, H. A. P. (1990) Automatic track formation in clutter with a recursive algorithm, in *Multitarget-Multisensor Tracking: Advanced Applications*, Y. Bar-Shalom (ed.). MA: Artech House, pp. 25–42.
- [14] Bar-Shalom, Y. (ed.) (1990) *Multitarget-Multisensor Tracking: Advanced Applications*. MA: Artech House.
- [15] Bar-Shalom, Y., Li, X. R. and Kirubarajan, T. (2001) *Estimation with Applications to Tracking and Navigation: Theory Algorithms and Software*. New York: Wiley.
- [16] Bayes, T. (1764) Essay towards solving a problem in the doctrine of chances, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, **53**, 370–418.

- [17] Berger, J. O. (1985) *Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis*. New York: Springer.
- [18] Bergman, N. (2001) Posterior Cramér–Rao bounds for sequential estimation, in *Sequential Monte Carlo Methods in Practice*, A. Doucet, N. de Freitas and N. Gordon (eds.). New York: Springer, pp. 321–338.
- [19] Bernardo, J. M. and Smith, A. F. M. (1994) *Bayesian Theory*. New York: Wiley.
- [20] Berry, D. A. (1996) *Statistics: A Bayesian Perspective*. Belmont: Duxbury.
- [21] Blackman, S. (1986) *Multiple Target Tracking with Radar Applications*. MA: Artech House.
- [22] Blackman, S. and Popoli, R. (1999) *Design and Analysis of Modern Tracking Systems*. MA: Artech House.
- [23] Blair, W. D. and Watson, G. A. (1992) Interacting multiple bias model algorithm with application to tracking maneuvering targets, in *IEEE Proc. 31st Conference on Decision and Control*, Tucson, AZ, December, pp. 3790–3795.
- [24] Blair, W. D. and Watson, G. A. (1994) IMM Algorithm for solution to benchmark problem for tracking maneuvering targets, in *Proc. SPIE Symposium on Acquisition, Tracking and Pointing*, Orlando, FL.
- [25] Blair, W. D., Watson G. A. and Hoffman, S. A. (1993) Second order interacting multiple model algorithm for tracking maneuvering targets, in *Proc. SPIE: Signal and Data Processing of Small Targets 1993*, O. E. Drummond (ed.), vol. 1954, pp. 518–529.
- [26] Blair, W. D., Watson, G. A. and Rice, T. R. (1991) Interacting multiple model filter for tracking maneuvering targets in spherical coordinates, in *IEEE Proceedings of SOUTHEASTCON' 91*, Williamsburg, VA, vol. 2, 1991, pp. 1055–1059.
- [27] Blom, H. A. P. (1984a) A sophisticated tracking algorithm for ATC surveillance data, in *Proc. International Radar Conference*, Paris, May.
- [28] Blom, H. A. P. (1984b) An efficient filter for abruptly changing systems, in *Proc. 23rd IEEE Conference on Decision and Control*, Las Vegas, NV, December, pp. 656–658.
- [29] Blom, H. A. P. and Bar-Shalom, Y. (1988) The interacting multiple model algorithm for systems with Markovian switching coefficients, *IEEE Proceedings on Auto Control AC*, **33**(8), 780–783.
- [30] Blom, H. A. P. and Bloem, E. (2002) Combining IMM and JPDA for tracking multiple maneuvering targets in clutter, in *Proc. 5th International Conference on Information Fusion, Fusion 2002*, Annapolis, MD, July, vol. 1, pp. 705–712.
- [31] Bocharadt, O., Calhoun, R., Uhlmann, J. K. and Julier, S. J. (2006) Generalized information representation and compression using covariance union, in *Proc. 9th International Conference on Information Fusion, Fusion 2006*, Florence, Italy, July, pp. 1–7.
- [32] Boulton, T. (1998) Frame-rate multi-body tracking for surveillance, in *Proc. DARPA Image Understanding Workshop*, Monterey, CA, pp. 305–308.
- [33] Box, G. P. A. and Tiao, G. C. (1973) *Bayesian Inference in Statistical Analysis*. New York: Wiley.
- [34] Bucy, R. and Senne, K. (1971) Digital synthesis of non-linear filters, *Automatica*, **7**, 287–298.
- [35] Chakravorty, R. and Challa, S. (2004) Fixed lag smoothing technique for track maintenance in clutter, in *Proc. Intelligent Sensors Sensor Networks and Information Processing*, pp. 119–124.
- [36] Chakravorty, R. and Challa, S. (2005) Smoothing framework for automatic track initiation in clutter, in *Proc. 8th International Conference on Information Fusion*, Philadelphia, PA, July, pp. 54–61.

- [37] Chakravorty, R. and Challa, S. (2006) Augmented state integrated probabilistic data association smoothing for multiple target tracking in clutter, *Journal of Advances in Information Fusion*, **1**(1), 63–74.
- [38] Chakravorty, R. and Challa, S. (2009) Multitarget tracking algorithm: joint IPDA and Gaussian mixture PHD filter, in *Proc. 12th International Conference on Information Fusion, Fusion 2009*, Seattle, WA, July, pp. 316–323.
- [39] Challa, S. (1998) Nonlinear state estimation and filtering with applications to target tracking problems. Unpublished PhD thesis, Queensland University of Technology.
- [40] Challa, S., Bar-Shalom, Y. and Krishnamurthy, V. (2000) Nonlinear filtering via generalized Edgeworth series and Gauss–Hermite quadrature, *IEEE Transactions on Signal Processing*, **48**(6), 1816–1820.
- [41] Challa, S., Evans, R. J. and Mušicki, D. (2002c) Target tracking – a Bayesian perspective, in *Proc. 14th International Conference on Digital Signal Processing*, Vol. 1, pp. 437–440.
- [42] Challa, S., Evans, R. and Wang, X. (2002a) A Bayesian solution to the OOSM problem, Submitted to *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*.
- [43] Challa, S., Evans, R. and Wang, X. (2002b) Target tracking in clutter using time-delayed out-of-sequence measurements, in *Proc. Defence Applications of Signal Processing (DASP)*, July.
- [44] Challa, S., Evans, R. J. and Wang, X. (2003) A Bayesian solution and its approximations to out-of-sequence measurement problems, *Information Fusion*, **4**(3), 185–199.
- [45] Challa, S. and Koks, K. (2004) Bayesian and Dempster–Shafer fusion, in *Sadhana*, Vol. 29, Part 2, pp. 145–176.
- [46] Challa, S. and Koks, D. (2005) An introduction to Bayesian and Dempster–Shafer data fusion, DSTO Technical Report 1436.
- [47] Challa, S., Vo, B. and Wang, X. (2002c) Bayesian approaches to track existence – IPDA and random sets, in *Proc. 5th International Conference on Information Fusion, Fusion 2002*, Annapolis, MD, July, Vol. 2, pp. 1228–1235.
- [48] Chan, Y. T., Hu, A. G. and Plant, J. B. (1979) A Kalman filter based tracking scheme with input estimation, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, **15**(2), 237–244.
- [49] Collins, R. T., Lipton, A. J., Kanade, T., Fujiyoshi, H., Duggins, D., Tsin, Y., Tolliver, D., Enomoto, N. and Hasegawa, O. (2000) A system for video surveillance and monitoring, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, PA, Technical Report, CMU-RI-TR-00-12.
- [50] Cover, T. M. and Thomas, J. A. (2006) *Elements of Information Theory*. New York: Wiley.
- [51] Cutaia, N. J. and O’Sullivan, J. A. (1995) Identification of maneuvering aircraft using class dependent kinematic models, ESSRL-95-13, May.
- [52] Daum, F. E. (1986) Exact finite-dimensional nonlinear filters, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **31**(7), 616–622.
- [53] Davies, A. C., Yin, J. H. and Velastin, S. A. (1995) Crowd monitoring using image processing, *Electronic and Communication Engineering Journal*, **7**(1), 37–47.
- [54] de Laplace, P. S. (1812) *Théorie analytique des probabilités*, Paris: Courcier Imprimeur.
- [55] Erdinc, O., Willett, P. and Bar-Shalom, Y. (2005) Probability hypothesis density filter for multitarget multisensor tracking, in *Proc. 8th International Conference on Information Fusion*, Philadelphia, PA, July, pp. 146–153.
- [56] Farina, A. and Studer, F. A. (1985) *Radar Data Processing, Vol. I: Introduction and Tracking, Vol. II: Advanced Topics and Applications*. Hertfordshire, England: Research Studies Press and New York: Wiley.

- [57] Farooq, M., Bruder, S., Quach, T. and Lim, S. S. (1992) Adaptive filtering techniques for manoeuvring targets, in *Proc. 34th Midwest Symposium on Circuits and Systems*, vol. 1, Monterey, CA, USA, pp. 31–34.
- [58] Gelman, A., Carlin, J. B., Stern, H. S. and Rubin, D. B. (1995) *Bayesian Data Analysis*. London: Chapman and Hall.
- [59] Gholson, N. H. and Moose, R. L. (1977) Maneuvering target tracking using adaptive state estimation, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, **13**(3), 310–317.
- [60] Goodman, I. R., Mahler, R. and Nhuyen, H. T. (1997) *Mathematics of Data Fusion*. Amsterdam: Kluwer.
- [61] Haritaoglu, I., Harwood, D. and Davis, L. S. (2004) W^4 : Real-time surveillance of people and their activities, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, **22**(8), 809–830.
- [62] Helmick, R. E., Blair, W. D. and Hoffman, S. A. (1993) Interacting multiple-model approach to fixed-interval smoothing, in *Proc. 32nd IEEE Conference on Decision and Control*, San Antonio, TX, December, pp. 3052–3057.
- [63] Helmick, R. E., Blair, W. D. and Hoffman, S. A. (1995) Fixed-interval smoothing for Markovian switching systems, *IEEE Transactions on Information Theory*, **41**(6), 1845–1855.
- [64] Helmick, R. E., Blair, W. D. and Hoffman, S. A. (1996) One-step fixed-lag smoothers for Markovian switching systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **41**(7), 1051–1056.
- [65] Hernandez, M., Farina, A. and Ristic, B. (2006) PCRLB for tracking in cluttered environments: measurement sequence conditioning approach, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, **42**(2), 680–704.
- [66] Hernandez, M., Marrs, A. D., Gordon, N. J., Maskell, S. R. and Reed, C. M. (2002) Cramér–Rao bounds for non-linear filtering with measurement origin uncertainty, in *Proc. 5th International Conference on Information Fusion*, Fusion 2002, Annapolis, MD, July, Vol. 2, pp. 18–25.
- [67] Hernandez, M., Ristic, B. and Farina, A. (2005) A performance bound for manoeuvring target tracking using best-fitting Gaussian distributions, in *Proc. 8th International Conference on Information Fusion*, Philadelphia, PA, July, pp. 1–8.
- [68] Hilton, R. D., Martin, D. A. and Blair, W. D. (1993) Tracking with time delayed data in multisensor system, Technical Report, NSWCCD/TR-93/351, Dahlgren, VA.
- [69] Ho, Y. C. and Lee, R. C. K. (1964) A Bayesian approach to problems in stochastic estimation and control, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **9**(4), 333–339.
- [70] Hoffman, J. R. and Mahler, R. (2002) Multitarget miss distance and its applications, in *Proc. 5th International Conference on Information Fusion*, Fusion 2002, Annapolis, MD, July, Vol. 2, pp. 149–155.
- [71] Hogg, R. V. and Craig, A. T. (1995) *Introduction to Mathematical Statistics*. New Jersey: Prentice-Hall.
- [72] Houles, A. and Bar-Shalom, Y. (1989) Multisensor tracking of a maneuvering target in clutter, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, **25**(2), 176–189.
- [73] Hu, W., Tan, T., Wang, L. and Maybank, S. (2004) A survey on visual surveillance of object motion and behaviors, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics – Part C: Applications and Reviews*, **34**(3), pp. 334–352.
- [74] Hwang, I., Balakrishnan, H., Roy, K. and Tomlin, C. (2004) Multiple-target tracking and identity management in clutter, with application to aircraft tracking, in *Proc. 2004 American Control Conference*, Boston, MA, June 30–July 2, pp. 3422–3428.

- [75] Ito, K. and Xiong, K. (2000) Gaussian filters for nonlinear filtering problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **45**(5), 910–927.
- [76] Jaffer, A. G. and Gupta, S. C. (1971) Recursive Bayesian estimation with uncertain observation, *IEEE Transactions on Information Theory*, **17**, 614–616.
- [77] Jazwinski, A. H. (1970) *Stochastic Processes and Filtering Theory*. New York: Academic Press.
- [78] Julier, S. J., Uhlmann, J. K. and Durrant-Whyte, H. (2000) A new method for the nonlinear transformation of means and covariances in filters and estimators, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **45**(3), 477–482.
- [79] Kalman, R. E. (1960) A new approach to linear filtering and prediction problems, *Transactions of the ASME, Journal of Basic Engineering*, March, 35–45.
- [80] Kingman, J. F. C. (1992) *Poisson Processes*. Oxford: Oxford University Press.
- [81] Kramer, S. C. and Sorenson, H. W. (1988) Bayesian parameter estimation, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **33**(2), 217–222.
- [82] Krause, S. S. (1995) *Avoiding Mid-air Collisions*. TAB Books.
- [83] Kudryavtsev, L. D. (2001) Implicit function, in *Encyclopedia of Mathematics*, M. Hazewinkel (ed.). New York: Springer.
- [84] Lerner, U. N. (2002) *Hybrid Bayesian Networks for Reasoning about Complex Systems*. Stanford, CA: Stanford University Press.
- [85] Lerro, D. and Bar-Shalom, Y. (1990) Automated tracking with target amplitude information, in *Proc. 1990 American Control Conference*, San Diego, CA, May, pp. 2875–2880.
- [86] Lerro, D. and Bar-Shalom, Y. (1993) Interactive multiple model tracking with target amplitude feature, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, **29**(2), 494–509.
- [87] Li, X. R. (1994) Multiple-model estimation with variable structure: some theoretical considerations, in *Proc. 33rd IEEE Conference on Decision and Control*, Orlando, FL, December, pp. 1199–1204.
- [88] Li, X. R. (2000) Multiple-model estimation with variable structure – part II: model-set adaptation, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **45**(11), 2047–2060.
- [89] Li, X. R. and Bar-Shalom, Y. (1992) Mode-set adaptation in multiple-model estimators for hybrid systems, in *Proc. 1992 American Control Conference*, Chicago, IL, June, pp. 1794–1799.
- [90] Li, X. R. and Bar-Shalom, Y. (1996) Multiple-model estimation with variable structure, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **41**(4), 478–493.
- [91] Li, X. R. and Bar-Shalom, Y. (1997) Intelligent PDAF: refinement of IPDAF for tracking in clutter, in *Proc. 29th SSST*, March, pp. 133–137.
- [92] Li, X. R. and He, C. (1999) 2M-PDAF: an integrated two-model probabilistic data association filter, in *Proc. SPIE: Signal and Data Processing of Small Targets 1999*, O. E. Drummond (ed.), pp. 384–395.
- [93] Li, X. R. and Zhang, Y. (2000) Multiple-model estimation with variable structure—part V: likely-model set algorithm, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, **36**(2), pp. 448–466.
- [94] Li, X. R., Zhi, X. and Zhang, Y. (1999) Multiple-model estimation with variable structure part III: model-group switching algorithm, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, **35**(1), 225–240.
- [95] Lin, L., Bar-Shalom, Y. and Kirubarajan, T. (2006) Track labeling and PHD filter for multi-target tracking. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, **42**(3), 778–795.

- [96] Lindley, D. V. (1972) *Bayesian Statistics, A Review*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [97] Lipton, A. J., Fujiyoshi, H. and Patil, R. S. (1998) Moving target classification and tracking from real-time video, in *Proc. 4th IEEE Workshop on Applications of Computer Vision*, pp. 8–14.
- [98] Mahalanabis, A. K., Zhou, B. and Bose, N. K. (1990) Improved multi-target tracking in clutter by PDA smoothing, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, **26**(1), 113–121.
- [99] Mahler, R. (1997) Multisensor-multitarget statistics, in *A Unified Approach to Data Fusion – Proceedings of 7th Joint Data Fusion Symposium*, F. A. Sadjadi (ed.), pp. 154–174.
- [100] Mahler, R. (2000) Approximate multisensor-multitarget joint detection, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, to appear.
- [101] Mahler, R. (2003a) Multitarget Bayes filtering via first-order multitarget moments, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, **39**(4), 1152–1178.
- [102] Mahler, R. (2003b) Objective functions for Bayesian control-theoretic sensor management, I: Multitarget first-moment approximation, in *Proc. IEEE Conference on Aerospace and Electronics Systems*, vol. 4, pp. 1905–1923.
- [103] Mahler, R. (2004a) “Statistics 101” for multisensor, multitarget data fusion, *IEEE Magazine of Aerospace and Electronic Systems*, **19**(1), 53–64.
- [104] Mahler, R. (2004b) An introduction to multisource-multitarget statistics and its applications, Technical report, Lockheed Martin.
- [105] Mahler, R. (2007) PHD filters of higher order in target number, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, **43**(4), 1523–1543.
- [106] Mallick, M., Coraluppi, S. and Bar-Shalom, Y. (2001b) Comparison of out-of-sequence measurement algorithms in multi-platform target tracking, in *Proc. 4th International Conference on Information Fusion*, Fusion 2001, Montreal, Quebec, August, Vol. II, pp. ThB1-11–18.
- [107] Mallick, M., Coraluppi, S. and Carthel, C. (2001a) Advances in asynchronous and decentralized estimation, in *Proc. 2001 IEEE Aerospace Conference*, Big Sky, MT, March.
- [108] Marcus, G. D. (1979) Tracking with measurements of uncertain origin and random arrival times. Unpublished thesis, University of Connecticut.
- [109] Mazor, E., Averbuch, A., Bar-Shalom, Y. and Dayan, J. (1998) Interacting multiple model methods in target tracking: a survey, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, **34**(1), 103–123.
- [110] McGinnity, S. and Irwin, G. (2001) Manoeuvring target tracking using a multiple-model bootstrap filter, in *Sequential Monte Carlo Methods in Practice*, A. Doucet, N. de Freitas and N. Gordon (eds.), New York: Springer, pp. 479–496.
- [111] Moose, R. L. (1975) An adaptive state estimation solution to the maneuvering target tracking problem, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **20**, 359–362.
- [112] Moose, R. L., Vanlandingham, H. F. and McCabe, D. H. (1979) Modeling and estimation for tracking maneuvering targets, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, **15**(3), 448–456.
- [113] Mori, S., Chong, C. Y., Tse, E. and Wishner, R. P. (1986) Tracking and classifying multiple targets without a priori identification, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **31**(5), 401–408.
- [114] Munir, A. and Atherton, D. P. (1994) Maneuvering target tracking using an adaptive interacting multiple model algorithm, in *Proc. 1994 American Control Conference*, vol. 2. Baltimore, MD, pp. 1324–1328.

- [115] Mušicki, D. (1994) Automatic tracking of maneuvering targets in clutter using IPDA. Unpublished PhD dissertation, University of Newcastle, New South Wales, Australia.
- [116] Mušicki, D. and Evans, R. J. (1995) Integrated probabilistic data association – finite resolution, *Automatica*, **31**(4), pp. 559–570.
- [117] Mušicki, D. and Evans, R. J. (2002) Joint integrated probabilistic data association JIPDA, in *Proc. 5th International Conference on Information Fusion, Fusion 2002*, Annapolis, MD, July, pp. 1120–1125.
- [118] Mušicki, D. and Evans, R. J. (2004a) Clutter map information for data association and track initialization, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, **40**(2), 387–398.
- [119] Mušicki, D. and Evans, R. J. (2004b) Joint integrated probabilistic data association – JIPDA, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, **40**(3), 1093–1099.
- [120] Mušicki, D. and Evans, R. J. (2008) Multi-scan multi-target tracking in clutter with ITS, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, to appear.
- [121] Mušicki, D. and La Scala, B. F. (2005) Limits of linear multitarget tracking, in *Proc. 8th International Conference on Information Fusion, Fusion 2005*, Philadelphia, PA, July, pp. 205–210.
- [122] Mušicki, D. and La Scala, B. F. (2008) Multi-target tracking in clutter without measurement assignment, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, **44**(3), 877–896.
- [123] Mušicki, D. and Morelande, M. (2004) Gate volume estimation for target tracking, in *Proc. 7th International Conference on Information Fusion, Fusion 2004*, Stockholm, Sweden, June 28–July 1, pp. 455–462.
- [124] Mušicki, D. and Suvorova, S. (2004) Target tracking initiation comparison and optimisation, in *Proc. 7th International Conference on Information Fusion, Fusion 2004*, Stockholm, Sweden, June 28–July 1, pp. 28–32.
- [125] Mušicki, D. and Suvorova, S. (2008) Tracking in clutter using IMM-IPDA based algorithms, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, **44**(1), 111–126.
- [126] Mušicki, D. and Wang, X. (2004) Reliability of PDA based target tracking in clutter, in *Proc. 7th International Conference on Information Fusion, Fusion 2004*, Stockholm, Sweden, June 28–July 1, pp. 1257–1262.
- [127] Mušicki, D., Challa, S. and Suvorova, S. (2004a) Automatic track initiation of maneuvering target in clutter, in *Asian Control Conference, ASCC 2004*, Melbourne, Australia, July, pp. 1008–1014.
- [128] Mušicki, D., Evans, R. J. and La Scala, B. F. (2003) Integrated tracking splitting suite of target tracking filters, in *Proc. 6th International Conference on Information Fusion, Fusion 2003*, Cairns, Australia, July, pp. 1039–1047.
- [129] Mušicki, D., Evans, R. J. and Stanković, S. (1994) Integrated probabilistic data association, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **39**(6), 1237–1241.
- [130] Mušicki, D., La Scala, B. F. and Evans, R. J. (2004b) Integrated track splitting filter for manoeuvring targets, in *Proc. 7th International Conference on Information Fusion, Fusion 2004*, Stockholm, Sweden, June 28–July 1, pp. 146–152.
- [131] Mušicki, D., La Scala, B. F. and Evans, R. J. (2007) The integrated track splitting filter – efficient multi-scan single target tracking in clutter, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, **43**(4), 1409–1425.
- [132] Mušicki, D., Mallick, M., La Scala, B. F., Strange, S. and Evans, R. (2005a) LMITS as an efficient MHT, in *Proc. SPIE: Signal and Data Processing of Small Targets 2005*, O. E. Drummond (ed.), pp. OVI–OVI2.

- [133] Mušicki, D., Suvorova, S., Morelande, M. and Moran, W. (2005b) Clutter map and target tracking, in *Proc. 8th International Conference on Information Fusion, Fusion 2005*, Philadelphia, PA, July, pp. 69–76.
- [134] Olson T. and Brill, F. (1997) Moving object detection and event recognition algorithms for smart cameras, in *Proc. DARPA Image Understanding Workshop*, pp. 159–175.
- [135] Panta, K., Vo, B. and Singh, S. (2005) Improved PHD filter for multi-target tracking, in *Proc. International Conference on Intelligent Sensing and Information Processing*, pp. 213–218.
- [136] Rapoport, I. and Oshman, Y. (2004) Recursive Weiss–Weinstein lower bounds for discrete-time nonlinear filtering, in *Proc. 43rd IEEE Conference on Decision and Control*, Atlantis, Paradise Island, Bahamas, December, pp. 2662–2667.
- [137] Rasmussen, C. and Hager, G. D. (2001) Probabilistic data association methods for tracking complex visual objects, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, **23**(6), 560–576.
- [138] Ravn, O., Larsen, T. D., Andersen, N. A. and Poulsen, N. K. (1998) Incorporation of time delayed measurements in a discrete time Kalman filter, in *Proc. 37th IEEE Conference on Decision and Control*, Tampa, FL, December, pp. 3972–3977.
- [139] Regazzoni, C. S. and Tesei, A. (1996) Distributed data fusion for real time crowding estimation, *Signal Processing*, **53**(1), 47–63.
- [140] Regazzoni, C. S., Tesei, A. and Munro, V. (1993) A real time vision system for crowding monitoring, *Proc. IECON*, pp. 1860–1864.
- [141] Reid, D. B. (1979) An algorithm for tracking multiple targets, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **24**(6), 843–854.
- [142] Ricker, G. G. and Williams, J. R. (1978) Adaptive tracking filter for maneuvering targets, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, **14**(1), 185–193.
- [143] Ristic, B. and Morelande, M. (2007) Comments on: Cramer–Rao lower bound for tracking multiple targets, in *Proceedings of the IET Radar Sonar Navigation*, **1**(1), 74–76.
- [144] Ristic, B., Farina, A. and Hernandez, M. (2004) Cramer–Rao lower bound for tracking multiple targets, in *Proceedings of the IET Radar Sonar Navigation*, **151**(3), 129–134.
- [145] Ross, S. M. (2003) *Introduction to Probability Models*. Orlando, FL: Academic Press.
- [146] Roumeliotis, S. I. and Bekey, G. A. (1997) An extended Kalman filter for frequent local and infrequent global sensor data fusion, in *Proc. SPIE (Sensor Fusion and Decentralized Control in Autonomous Robotic Systems)*, Pittsburgh, PA, October 14–19, pp. 11–22.
- [147] Salmond, D. (1990) Mixture reduction algorithms for target tracking in clutter, *Proc. SPIE: Signal and Data Processing of Small Targets, 1990*, O. E. Drummond (ed.), pp. 434–445.
- [148] Sidenbladh, H. (2003) Multi-target particle filtering for the probability hypothesis density, in *Proc. 6th International Conference on Information Fusion, Fusion 2003*, Cairns, Australia, July, pp. 800–806.
- [149] Singer, R. A., Sea, R. G. and Housewright, K. B. (1974) Derivation and evaluation of improved tracking filters for use in dense multitarget environments, *IEEE Transactions on IT*, **IT-20**(4), 423–432.
- [150] Stigler, S. M. (1986) *The History of Statistics, The Measurement of Uncertainty before 1900*. The Belknap Press of Harvard University Press.
- [151] Sworder, D. D. and Boyd, J. E. (1999) *Estimation Problems in Hybrid Systems*. New York: Cambridge University Press.
- [152] Tan, T. N., Sullivan, G. D. and Baker, K. D. (1998) Model-based localization and recognition of road vehicles, *International Journal of Computer Vision*, **27**(1), 5–25.

- [153] Thomopoulos, S. C. A. and Zhang, L. (1994) Decentralized filtering with random sampling and delay, *Information Sciences*, **81**(1), 117–131.
- [154] Tichavský, P., Muravchik, C. H. and Hehorai, A. (1998) Posterior Cramér–Rao bounds for discrete-time nonlinear filtering, *IEEE Transactions on Signal Processing*, **46**(5), 1386–1396.
- [155] Tugnait, J. K. (1982) Detection and estimation for abruptly changing systems, *Automatica*, **18**(5), 607–615.
- [156] Van Trees, H. L. (1968) *Detection, Estimation, and Modulation Theory, Part I*. New York: Wiley.
- [157] Vo, B. and Ma, W. (2006) The Gaussian mixture probability hypothesis density filter, *IEEE Transactions on Signal Processing*, **54**(11), 4091–4104.
- [158] Vo, B., Singh, S. and Doucet, A. (2005) Sequential Monte Carlo methods for multi-target filtering with random finite sets, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, **41**(4), 1224–1245.
- [159] Vo, B. T., Vo, B. N. and Cantoni, A. (2006) The cardinalized probability hypothesis density filter for linear Gaussian multi-target models, in *Proc. 40th Annual Conference on Information Sciences and Systems*, pp. 681–686.
- [160] Wang, X. and Challa, S. (2003) Augmented state IMM-PDA for OOSM solution to maneuvering target tracking in clutter, in *Proc. 2003 International Radar Conference*, pp. 479–485.
- [161] Wang, X. and Mušicki, D. (2007) Low elevation sea-surface target tracking, using IPDA type filters, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, **43**(2), 759–774.
- [162] Wang, X., Challa, S., Evans, R. J. and Li, X. R. (2003) Minimal submodel-set algorithm for maneuvering target tracking, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, **39**(4), 1218–1231.
- [163] Wang, X., Mušicki, D., Richard, E. and Fletcher, F. (2008) Efficient and enhanced multi-target tracking with Doppler measurements, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, to appear.
- [164] Williams, J. L. and Mayback, P. S. (2003) Cost-function-based Gaussian mixture reduction for target tracking, in *Proc. 5th International Conference on Information Fusion, Fusion 2003*, Cairns, Australia, July, pp. 1047–1054.
- [165] Wren, C. R., Azarbayejani, A., Darrell, T. and Pentland, A. P. (1997) Pfunder: real-time tracking of the human body, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, **19**(7), 780–785.
- [166] Zajic, T. and Mahler, R. (2003) A particle-systems implementation of the PHD multi-target tracking filter, in *Proc. SPIE Signal Process, Sensor Fusion Target Recognition XII*, pp. 291–299.

内 容 简 介

数十年来,在目标跟踪领域涌现了许多经典算法,诸如卡尔曼滤波、粒子滤波、交互式多模型(IMM)、概率数据互联(PDA)、集成航迹分裂(ITS)算法以及随机集方法等。然而,这些算法之间有什么本质联系?它们究竟是怎样帮助我们实现飞机、导弹、太空目标以及人乃至淋巴细胞的跟踪的呢?对于新的应用背景,该如何去调整这些算法呢?本书对以上问题进行了系统明确的论述。

本书由9章组成。首先,针对目标跟踪问题给出通用的贝叶斯解。基于此贝叶斯通用框架,系统地描述了主要的跟踪问题,如机动目标跟踪、多目标跟踪、杂波环境下的跟踪以及非顺序量测跟踪等,并给出了这些标准跟踪算法的详细推导。这一结构化的分析方法,将帮助越来越多的从事目标跟踪实践及科研的工作者理解和掌握种类众多的复杂目标跟踪算法,并为他们在各自特殊的应用背景下设计适应性的跟踪算法提供有力的理论支撑。书中最后给出了建立跟踪系统的一些实用算法,如航迹初始化、航迹合并算法等。附录中还给出了与目标跟踪有关的数学及统计学预备知识。

本书适合于从事目标跟踪问题研究的科技人员阅读,也可作为高等院校相关专业师生的参考书。